

Unification des définitions de mots et des notations mathématiques (suite)

40. Au sujet des Transformations en géométrie élémentaire

Je me propose d'apporter, en ce qui concerne le vocabulaire relatif aux *Transformations*, quelques éléments à l'étude entreprise par l'Association des Professeurs de Mathématiques.

Que mes collègues veuillent bien m'excuser si le désir de n'être pas trop incomplet me conduit à répéter des choses bien connues. Quant aux nouveautés (très relatives) que contient cet article, puissent-elles ne pas ajouter à la confusion déjà existante !

Généralités sur les transformations.

Pour exprimer qu'une transformation A fait correspondre le point M' au point M on écrit quelquefois :

$$(A) \quad M \rightarrow M' \quad (1)$$

On pourrait également employer la notation

$$(2) \quad A(M) = M'$$

qui rappelle la notation $y = f(x)$ employée pour les fonctions ; mais peut-être pensera-t-on qu'une notation spéciale n'est nullement indispensable.

Le point M' qui correspond au point M s'appellera indifféremment *l'homologue*, ou le *transformé*, ou le *correspondant* de M dans la transformation considérée. Si M' coïncide avec M , M sera dit *invariant*.

La transformation dans laquelle tous les points sont invariants est la *transformation identique* ; on la désigne par I .

Si une transformation A transforme M en M' la transformation qui fait correspondre M' à M est dite *inverse* de la précédente, on la désigne par A^{-1} .

Le produit d'une transformation A par une transformation B s'écrivait généralement AB . La notation BA pour désigner le même produit est maintenant souvent employée. Elle s'impose si on emploie la notation de l'égalité (2). On écrirait alors :

$$A(M) = M' \quad B(M') = M'' \quad \text{et} \quad BA(M) = M''$$

Le sens des symboles $A^2, A^3, \dots, A^n, \dots, A^{-n}$ est évident. Si $A^n \equiv I$ la transformation A est dite d'ordre n (ou cyclique d'ordre n).

Une transformation est dite *réciproque* si elle n'est pas distincte de son inverse ($A \equiv A^{-1}$) ou encore si elle est d'ordre 2 ($A^2 \equiv I$). L'équivalence des définitions est évidente (deux transformations ne sont pas distinctes si tout point M a le même homologue dans chacune d'elles).

Un ensemble de transformations forme un *groupe*, si A, B , appartenant à l'ensemble il en est de même de A^{-1} et de AB .

Si une transformation A fait correspondre M' à M et si une transformation B change M et M' en M_1 et M_1' la transformation C qui fait correspondre M_1' à M_1 est dite *transformée de A par B* .

Si nous employons le symbolisme de l'équation (2) et la notation correspondante pour le produit on aura :

$$A(M) = M' \quad B(M) = M_1 \quad B(M') = M'_1 \quad C(M_1) = M'_1$$

$$\text{donc} \quad CB(M) = B(M') = BA(M)$$

$$\text{ou} \quad CB \equiv BA \\ C \equiv BAB^{-1}.$$

(Avec la notation ancienne pour le produit on aurait $C = B^{-1} AB$).

Déplacements et symétries.

EN GÉOMÉTRIE PLANE.

Déplacement plan : déplacement laissant un plan invariant (et dont on limite l'étude aux points de ce plan).

On réserve quelquefois le nom de « déplacement plan » aux déplacements qui conservent l'orientation, cette restriction ne me semble pas justifiée.

Un déplacement plan sera dit *positif* ou *négatif* selon qu'il conserve ou qu'il change l'orientation.

Symétries : déplacements plans réciproques ; on aura une « symétrie point » ou une « symétrie droite » selon qu'il s'agit d'un déplacement positif ou d'un déplacement négatif.

Transformations métriques (ou isométriques) : transformations telles que deux points M, P ayant pour homologues M', P' on a $MP = M'P'$.

Dans le plan ces transformations ne diffèrent pas des déplacements.

EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

Les déplacements sont nécessairement positifs (gardent l'orientation).

Transformations métriques : définies comme plus haut une telle transformation est soit un déplacement, soit le produit d'un déplacement par une symétrie relative à un plan.

Les transformations métriques correspondant à ce dernier cas pourraient être appelées « contre déplacements » ou « déplacements négatifs de l'espace ». Il serait entendu que deux figures homologues dans un tel déplacement ne sont pas égales (pas superposables).

Symétries de l'espace : transformations métriques réciproques. On obtient une symétrie-droite ou une symétrie-point ou une symétrie-plan.

Qu'il s'agisse du plan ou de l'espace la définition des symétries a pour conséquences immédiates les théorèmes suivants :

Le milieu du segment qui joint deux points homologues est invariant.

Le point commun (éventuel) à deux droites homologues est invariant.

La droite commune (éventuelle) à deux plans homologues est invariante.

La bissectrice de deux axes concourants homologues est invariante...

Cette similitude dans les propriétés (qui pourrait être suivie plus loin) me semble justifier l'emploi du terme commun « symétrie » pour désigner ces diverses transformations.

On pourrait même aller plus loin : le mot de « symétrie » évoque une certaine répétition dans les parties d'une figure ; ce sens intuitif correspond à la définition d'une transformation métrique d'ordre n ; on pourrait donc parler de symétries d'ordre n . Le mot « symétrie », sans épithète, désignerait les symétries d'ordre 2.

Similitude.

GÉOMÉTRIE PLANE.

L'emploi des expressions : « similitude directe, similitude inverse » me semble fâcheux, le mot « inverse » ayant déjà dans la question qui nous intéresse un autre sens. Si l'on dit : « La similitude inverse d'une similitude directe est une similitude directe », on ne sera évidemment pas très clair.

Il me semble préférable d'employer les termes de *similitude positive ou négative*. L'emploi des termes « positif » et « négatif » est ainsi lié à la conservation ou à la non conservation de l'orientation (analytiquement au signe du déterminant fonctionnel de la transformation). Il y a bien quelques inconvénients : en géométrie plane une homothétie de rapport négatif, que notre Association conseille d'appeler « homothétie négative », conserve l'orientation et serait par suite une transformation positive. Je ne pense pas que cet inconvénient l'emporte sur les avantages.

Le terme de *rotation-homothétie* pourrait désigner le produit d'une rotation par une homothétie de même centre ; de même une *symétrie-homothétie* serait le produit d'une symétrie relativement à une droite par une homothétie dont le centre est sur la droite.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

On réserve généralement en France le nom de « similitude » au produit d'un déplacement par une homothétie *positive*. Cette restriction ne semble pas justifiée. Il me semble plus naturel de définir la similitude par la condition $M'P' = kMP$ dans laquelle $M'P'$ désignent les homologues de deux points quelconques M et P . Si on a, au préalable, étudié les transformations métriques on voit immédiatement que la similitude de l'espace équivaut au produit d'un déplacement positif ou négatif par une homothétie positive, ou bien au produit d'un déplacement positif par une homothétie positive ou négative. Les similitudes obtenues seraient, suivant les cas, dites positives ou négatives.

Les figures seraient dites positivement ou négativement semblables. C'est ainsi que procède, par exemple : SEVERI (*Elementi di Geometria*), avec toutefois, cette différence que les mots « positif » et « négatif » sont remplacés par « direct » et « inverse » (ou directement et inversement). SEVERI emploie même l'expression de « figures inversement égales » (non superposables) dans l'espace, dans le cas d'une similitude négative de rapport 1. Il me semble que ces désignations concourent à mettre de l'unité dans un sujet qui apparaît souvent sous une forme trop morcelée.

Jé n'examinerai pas la transformation par polaires ni l'inversion : elles donneraient lieu à des remarques plus banales encore que les précédentes.

P. LANGLAMET,

Professeur au Lycée de Versailles.
