

DEUXIÈME PARTIE

Sur la résolution d'une équation trigonométrique

Voici un mode de résolution de l'équation

$$a \cos x + a_1 \cos (x + \alpha_1) = b$$

qui n'est certes pas inédit, mais qui pourra, peut-être, intéresser quelques collègues.

Soient OU l'axe polaire, OX et OX₁ les deux axes dont les directions positives sont définies par

$$(OU, OX) = x \quad (OX, OX_1) = \alpha_1.$$

Je désigne par A le point de OX et par A₁ celui de OX₁ tels que

$$\overline{OA} = a \quad \overline{OA_1} = a_1$$

$\overline{OR}$ est défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_1}$$

Lorsque x varie (a , a_1 et α_1 étant constants), le parallélogramme OARA₁ conserve une grandeur fixe et tourne autour du point O : le point R décrit donc le cercle (O), de centre O et de rayon $|\overline{OR}|$.

D'autre part, en projetant sur OU, on a, quel que soit x :

$$\text{proj. } \overrightarrow{OR} = \text{proj. } \overrightarrow{OA} + \text{proj. } \overrightarrow{OA_1} = a \cos x + a_1 \cos (x + \alpha_1) = b.$$

Pour que x soit solution de l'équation, il faut et il suffit que le point R soit sur la perpendiculaire (Δ) à OU menée par le point B tel que $\overline{OB} = b$; les intersections de (O) et de (Δ) fournissent donc les points R et on en déduit les solutions de l'équation proposée.

Cette méthode s'applique à la résolution de l'équation :

$$a \sin x + b \cos x = -a \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + b \cos x = c$$

le parallélogramme étant alors un rectangle.

Elle montre aussi, *a priori*, la possibilité de déterminer deux constantes M et φ ($M > 0$) telles que

$$a \cos x + a_1 \cos (x + \alpha_1) \equiv M \cos (x + \varphi)$$

en posant $(OX, OR) = \varphi$ et $|\overrightarrow{OR}| = M$.

Enfin ces résultats se généralisent aisément à l'expression

$$E = a \cos x + a_1 \cos (x + \alpha_1) + \dots + a_n \cos (x + \alpha_n)$$

et à la résolution de l'équation

$$E = b.$$

E. MOUTON,

Professeur au Lycée d'Alès.