

DEUXIÈME PARTIE

Sur les diamètres conjugués d'une conique à centre définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité

Voici quelques remarques, qui ne sont sans doute pas nouvelles, sur les diamètres conjugués d'une conique à centre définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité.

Soit une conique définie par son foyer F, la directrice associée (D), son excentricité e ($e \neq 1$), et proposons-nous de déterminer les points d'intersection de cette conique et d'une droite (Δ) qui rencontre (D) en I. Si M est un point d'intersection qui se projette orthogonalement en K sur (D)

on a $\frac{MF}{MK} = e$, d'où $\frac{MF}{MI} = e \sin \alpha$, α désignant l'angle $\widehat{KIM}$; le point M est donc sur le cercle (Γ) ayant pour diamètre le segment CC' de la droite IF tel que $\frac{CE}{CI} = \frac{C'F}{C'I} = e \sin \alpha$. On trouve ainsi deux solutions M et M'

et nous ne discuterons pas la réalité de ces points, nous proposant de chercher le lieu du milieu P de MM' quand la droite (Δ) se déplace parallèlement à elle-même.

Le centre ω de (Γ) se projette orthogonalement en P au milieu de MM' sur (Δ); la parallèle à ωP menée par F rencontre (Δ) en φ , (D) en S, la droite SF est fixe.

On a $\frac{P\varphi}{PI} = \frac{\omega F}{\omega I}$, et on sait d'autre part que $\frac{\omega F}{\omega I} = e^2 \sin^2 \alpha$; ceci

prouve que lorsque (Δ) se déplace parallèlement à elle-même, P décrit une droite fixe SA' passant évidemment par le centre O de la conique.

Le diamètre (Δ') conjugué de la direction (Δ) que nous supposons donnée par une droite $O\Delta$ passant par le centre, peut donc être déterminé de la façon suivante : on joint le centre O au point S d'intersection de la directrice (D) avec la perpendiculaire abaissée du foyer F sur (Δ). La droite $O\Delta$ coupe (D) en S' et F est sur la perpendiculaire OH à la directrice, de sorte que F est l'orthocentre du triangle OSS'; donc réciproquement et en vertu de la construction précédente, $O\Delta$ est le diamètre conjugué de la direction (Δ').

Cette construction établit ainsi la réciprocity de deux diamètres conjugués.

Leur correspondance involutive se trouve de plus mise en évidence, car le cercle circonscrit au triangle OSS' passe par le symétrique F' de F par rapport à (D).

On verra aisément que si $e < 1$, les points doubles de l'involution (S, S') déterminée par le faisceau de cercles précédent sur la directrice (D) sont imaginaires, car O et F' sont de part et d'autre de (D) ; tandis que si $e > 1$ ces points doubles, réels, σ et σ' , sont les points de contact des cercles passant par O et F' tangents à (D) ; ils fournissent les asymptotes $O\sigma$, $O\sigma'$ et la relation $\overline{HO} \cdot \overline{HF'} = -\overline{HO} \cdot \overline{HF} = \overline{H\varphi}^2$ identifie la construction précédente à la construction classique à l'aide du triangle $OF\varphi$ rectangle en φ .

A. BERLANDE,

Professeur au Lycée du Parc, Lyon.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT (personnel intéressé). — 50.199