

VI. Documents officiels

8. Rapport sur le Concours, en 1934, de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (2)

Epreuves écrites (3).

Le nombre des candidats inscrits continue de croître. Il est passé de 143 à 159. En fait, 144 ont participé à la première épreuve. Fait sans précédent à ce concours, un candidat s'est présenté aux deux premières ainsi qu'à la quatrième et non à la troisième, faute de s'être tenu au courant des dates précises de ces épreuves ; un échec dont il porte toute la responsabilité était fatal.

Peu se sont découragés, au cours des épreuves écrites, puisque 131 se sont présentés à la composition de mécanique. Plus encore que ceux du concours précédent, les candidats ont montré, à cette occasion, une persistance dont on ne peut que les féliciter.

(1) Portant de 4 heures à 5 heures la durée des 3 compositions écrites de mathématiques (voir page 88 du présent *Bulletin*).

(2) Le Jury était composé de MM. BLUTEL, inspecteur général honoraire, président ; LECONTE, inspecteur général, vice-président ; BÉGIN, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; SOULA, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier ; ROBERT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

(3) Voir les énoncés pages 17 et suivantes des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1934*.

La proportion effective des candidats nouveaux n'est cependant que de 34 o/o alors qu'elle était de 47 o/o l'an dernier. Cela tient à une légère diminution des concurrents nouveaux, ce dont on peut se réjouir, mais surtout à une sérieuse augmentation des anciens, qui risque d'alourdir le concours et de compliquer inutilement la tâche des correcteurs. Un candidat qui a mesuré ses forces et s'est trouvé fort loin du but ne devrait pas se représenter avant d'avoir fourni un effort vraiment sérieux.

Les 144 candidats sont ainsi répartis :

13 élèves ou anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 4 auditeurs libres à cette école, 26 étudiants ou boursiers auprès des diverses Facultés, 19 fonctionnaires titulaires ou délégués de l'enseignement primaire, 38 répétiteurs et 5 maîtres d'internat de l'enseignement secondaire, 23 professeurs de collège et 16 délégués professeurs licenciés.

Sur ce nombre, 38 ont été déclarés admissibles, savoir :

11 élèves ou anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 2 auditeurs libres à cette école, 4 étudiants ou boursiers près des Facultés des sciences, 5 fonctionnaires de l'enseignement primaire, 3 répétiteurs et 1 maître d'internat de l'enseignement secondaire, 5 professeurs titulaires et 7 délégués de collège.

Dans l'ensemble, 12 avaient déjà été déclarés admissibles à un ou plusieurs concours précédents.

L'admissibilité a été conférée à tous ceux qui totalisaient 29 points au moins pour les quatre compositions. La moyenne nécessaire, $7\frac{1}{4}$, est donc nettement supérieure à celle de l'an dernier, soit 6. Il n'en faudrait pas conclure que les candidats de 1934 sont plus instruits, dans l'ensemble, que ceux de 1933.

Si l'on fait abstraction des cotes personnelles des correcteurs et de la difficulté relative des sujets, on constate, par rapport à l'an dernier, une augmentation d'environ 1,5 en élémentaires, 0,6 en spéciales, 2,6 en mécanique et une diminution de 1,9 en analyse.

Des rapports particuliers vont préciser cette première impression.

Mathématiques élémentaires (M. LÉCONTE). — « 144 candidats ont pris part à cette épreuve.

23 notes atteignent ou dépassent la moyenne : trois 17 ; deux 16,5 ; un 15 ; deux 14 ; deux 13 ; deux 12,5 ; un 12 ; un 11,5 ; trois 11 ; un 10,5 ; cinq 10.

Viennent ensuite : un 9,5 ; un 9 ; deux 8,5 ; huit 8 ; treize 7,5 ou 7 ; quatorze 6,5 ou 6 ; dix-sept 5,5 ou 5 ; onze 4,5 ou 4 ; vingt-et-un 3,5 ou 3 ; vingt-et-un 2,5 ou 2 ; sept 1,5 ou 1 ; cinq 0,5.

La moyenne générale est 5,7 ; celle des admissibles 9,6 ; celle des reçus 11,5. Ces résultats, pourtant alourdis par un trop grand nombre de mauvaises compositions, sont numériquement supérieurs à ceux des années précédentes. Est-il possible d'affirmer qu'ils sont plus satisfaisants ? Le mode de notation finalement adopté n'est-il pas très large ? Le sujet ne semble-t-il pas plus facile, dans l'ensemble, que ceux des derniers concours ?

Quoi qu'il en soit, on peut se rendre compte que les candidats ont été classés sans difficulté et on peut, d'autre part, espérer que nombre d'entre eux, en reprenant le problème, sauront le traiter complètement à tête reposée et regretteront davantage de ne pas l'avoir poussé plus loin le jour du concours.

Les questions proposées sont relatives à certaines propriétés des cercles d'un plan dont les diamètres sont deux des quatre points alignés A, B, C, D, la notation (AB), par exemple, désignant le cercle de diamètre AB.

La première partie est une question de cours destinée à préparer la suite en appelant l'attention sur trois points I, J, K de la droite ABCD.

Chacun de ces points est le pied de l'axe radical d'un des trois couples de cercles tels que (AB), (CD) en même temps qu'un centre d'homothétie pour chacun des deux autres couples.

60 candidats seulement ont nettement vu que l'interprétation des formules fondamentales telles que $\overline{IA} \cdot \overline{ID} = \overline{IB} \cdot \overline{IC}$ suffit à résoudre la question.

Dans les autres copies, on trouve des longueurs, des artifices inutiles (inversion par rapport au point S, emploi du principe de continuité) ; ou bien, en désespoir de cause, la géométrie analytique est utilisée ; des fautes de langage sont nombreuses, difficilement pardonnables parce que sur un sujet aussi classique, elles ne peuvent que correspondre à une pensée flottante (centres d'homothétie imaginaires) ; des erreurs graves peuvent être signalées (on sait que deux cercles intérieurs l'un à l'autre n'ont pas de centres d'homothétie) ; d'assez nombreux candidats laissent l'impression de se trouver en face d'une question entièrement nouvelle qui exige beaucoup de fertilité d'esprit. C'est ainsi qu'on lit dans une copie estimable par ailleurs : pour placer I et J, nous allons relever la figure plane sur une sphère, à l'aide d'une projection stéréographique.

La seconde partie propose la recherche de relations entre les lignes trigonométriques de certains angles de la figure.

Elle peut être traitée sans le moindre effort si l'on opère le calcul des lignes trigonométriques en fonction des abscisses des points A, B, C, D. Ce procédé un peu long, mais logique, n'a guère été employé.

Pour la plupart, les candidats ont utilisé la figure. Mais si l'on remarque qu'on ne trouve aucun résultat appréciable dans plus de 80 copies, si l'on se souvient qu'en cours de conversations, tous les candidats interrogés ont reconnu que ce petit calcul leur avait fait perdre beaucoup de temps, on éprouvera le regret que se trouvent aujourd'hui négligées à un tel point les plus simples applications de la trigonométrie à la recherche des éléments

d'une figure. La première des deux formules demandées $\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \frac{V}{2}$, par exemple, est presque écrite lorsqu'on a formé les rapports :

$$\sin \alpha = \frac{IA - IC}{IA + IC} = \frac{IB - ID}{IB + ID} = \frac{IA - IB - (IC - ID)}{IA - IB + IC - ID} = \frac{OS - O'S}{OS + O'S}$$

On a tenu le plus grand compte possible à certains candidats d'avoir remarqué qu'une relation simple entre les lignes trigonométriques des angles β , γ , V , utile pour la formation des deux relations cherchées, résulte

immédiatement de la proportionnalité des côtés aux sinus des angles dans le triangle OSO' .

La relation entre α , β , V recevait, à la fin de cette partie, une application qui se rattachait à la disposition des cercles Γ et par conséquent aux parties qui suivent. Non seulement ce rapprochement n'a été fait par aucun des candidats, mais il n'en est aucun non plus qui ait su, dans le cas limite, placer le point S par rapport aux tangentes communes aux cercles (AC) , (BD) , en disant, avec preuve à l'appui, que le point S se trouve sur ces tangentes lorsque V est droit et que $AC = BD$.

Nous ne signalerions pas, si elle n'était relativement fréquente, l'étonnante incapacité de déduire de la formule $\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \frac{V}{2}$ la place du point S par rapport aux tangentes communes lorsque V est obtus.

La troisième partie est bien traitée par une dizaine de candidats, parmi lesquels sept la résolvent d'une manière irréprochable.

Plus de 60 copies renferment une démonstration correcte de l'existence des deux cercles Γ et des deux cercles Γ' passant par S , de la détermination de leurs tangentes en S , de la propriété des quatre points communs à ces cercles, autres que S , de se trouver sur un cercle orthogonal aux cercles (AB) , (CD) . Ces points fondamentaux peuvent être traités sans utiliser d'autres inversions que celles de pôles I et J qui transforment respectivement l'un en l'autre soit les cercles du couple (AC) , (BD) , soit ceux du couple (AD) , (BC) . Trop de candidats n'y prennent pas garde et utilisent trop tôt les inversions de pôles S et A .

Bien des fautes seraient à signaler. Bornons-nous à donner deux exemples empruntés aux compositions de candidats sérieux : d'une part des efforts héroïques et vains pour savoir ce que peut bien être un parallélogramme dont les angles opposés sont supplémentaires, d'autre part l'assurance avec laquelle on nous dit que le lieu des centres des cercles tangents aux cercles (AC) , (BD) , est un cercle du faisceau qu'ils forment.

La quatrième partie est la moins bien traitée de toutes. Si 24 candidats l'ont abordée utilement, aucun n'a pu la terminer, à beaucoup près.

Elle commence par la détermination des deux cercles communs aux familles Γ et Γ' , détermination facile au moyen d'une des deux inversions de pôles S et A .

On envisage ensuite les cercles de ces deux familles qui ont leurs centres en l'un des autres points communs aux deux coniques lieux des centres. La relation demandée $2R = R'_1 - R_1$ entre certains rayons, est peut-être la question la plus facile de tout le problème. Elle n'exige aucune imagination, aucune transformation par inversion. Il suffit pour la résoudre d'observer des propriétés immédiates de la figure : les deux coniques sont coaxiales, les points M et M_1 sont symétriques par rapport à leur axe non focal. Elle n'a pourtant été traitée par aucun candidat.

Enfin, le lieu du point M et l'enveloppe du cercle Γ_M , obtenus par huit candidats, se déduisent facilement par une vue directe des choses, de

ce que le point M est sur KS à une distance $KM = KS\sqrt{2}$, et de ce que le rayon de Γ_M est égal à KS .

La dernière partie du problème est un cas particulier d'une belle propriété, due à Steiner, sur les files fermées de cercles tangents entre eux s'ils sont consécutifs et tangents à deux cercles donnés, ces deux cercles satisfaisant bien entendu à une condition. Ici, chaque file comprend quatre cercles.

Huit candidats sont parvenus à des résultats ; trois ou quatre d'entre eux ont à peu près traité la question.

Deux solutions méritent d'être indiquées. Dans l'une, la plus simple, on ramène par inversion les cercles (AD) , (BC) , à être concentriques, et on conclut que si une file de quatre cercles existe, toutes les autres s'obtiennent par rotation autour du centre commun. La solution est alors obtenue puisque la quatrième partie du problème montre l'existence d'une file : (AC) , Γ_M , (BD) , Γ_M . Dans l'autre solution, une même inversion est employée ; mais on envisage les cercles tangents aux deux cercles égaux qui sont les transformés de (AC) et (BD) . Leurs centres sont sur une droite et on montre que les extrémités du diamètre de l'un d'eux, sur cette droite, sont vues d'un point fixe sous l'angle de $\frac{\pi}{4}$.

Ce rapport ne serait pas complet si nous omettions de demander une fois de plus aux candidats de respecter le français et l'orthographe (J'aurai une droite. Ces points sont alignés ! Les points M et N se correspondent...), si nous ne les priions pas, eux, futurs professeurs, d'être clairs, de faire des figures lisibles, d'éviter au correcteur comme plus tard aux élèves des efforts qui seraient inutiles avec un peu de soin, de toujours justifier scrupuleusement les résultats obtenus, si enfin nous ne les prévenions pas qu'il est tenu grand compte des qualités et des défauts qu'ils montrent à ces divers points de vue. »

Mathématiques spéciales (M. ROBERT). — « 144 compositions ont été remises. La meilleure a obtenu la note 18, la seconde étant cotée 16 ; viennent ensuite quatre notes 12,5, une note 12, deux notes 11,5, deux notes 11, deux notes 10,5, quatre notes 10, soit, en tout dix-sept résultats atteignant la moyenne.

Trois autres en approchent avec 9,5, huit avec 9, quatre ont eu 8,5, huit la note 8, huit 7,5, deux 7, huit 6,5, six 6, six 5,5, dix 5.

Il y a 65 notes inférieures à 5, cinquante-quatre inférieures à 4, quarante-trois inférieures à 3, vingt-quatre inférieures à 2 et six inférieures à 1. La moyenne de toutes les notes est 5,45.

D'une manière générale les candidats n'ont pas réussi à dominer assez d'emblée la question proposée, puis à comprendre l'enchaînement de ses diverses parties. Les efforts ne sont pas coordonnés, on ne sait pas exploiter son succès.

Il s'agissait d'étudier la famille (F) des droites perpendiculaires commu-

nes à deux génératrices quelconques d'un même système (G_1) d'un hyperboloïde à une nappe donné H , non de révolution. D'autres définitions de cette famille (F) peuvent être envisagées ; l'énoncé les suggérait et demandait d'en tirer parti pour établir les propriétés de ces droites.

Des indications détaillées fournies dans le texte orientaient les chercheurs dans une voie commune, celle de l'emploi des coordonnées plückériennes de droites. Des connaissances rudimentaires sur ce sujet suffisaient et la condition pour que deux droites soient coplanaires y jouait le rôle principal.

Il semble d'ailleurs que la géométrie réglée soit actuellement assez connue des candidats, ce dont il faut se féliciter. Mais un très grand nombre ont été arrêtés, ou essoufflés par le calcul des perpendiculaires communes, entrepris maladroitement en partant d'équations classiques de génératrices, et traité comme application servile d'une question de cours, alors qu'il faut adapter avant tout le calcul au but visé.

Dans une première partie on devait montrer l'équivalence de la famille (F) avec celle des axes centraux des complexes linéaires contenant toutes les génératrices du système donné (G_1). Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite D , de coordonnées plückériennes $\alpha \beta \gamma \lambda \mu \nu$, appartiennent à (F), apparaissaient naturellement au cours de cette étude.

Les raisonnements établissant cette équivalence ne sont à peu près complets que dans trente-deux compositions ; trente-huit autres établissent une proposition en négligeant presque entièrement sa réciproque.

On a tenu ici le plus grand compte des considérations géométriques ; encore faut-il qu'elles soient assez développées pour convaincre dans tous les cas. La majorité de ceux qui les ont utilisées négligent la circonstance d'un complexe singulier, pour lequel il n'est plus exact de dire que les droites rencontrant l'axe central coupent celui-ci à angle droit. Dans l'espèce les axes des complexes singuliers contenant toutes les génératrices G_1 d'une demi-quadrique de H , sont les génératrices G de la demi-quadrique complémentaire. Ceci montre que les droites G font partie de la famille (F), et ce fait est manifeste aussi d'après la définition primitive de cette famille.

Les conditions visées plus haut étaient de la forme

$$\frac{\lambda}{\alpha} - A = \frac{\mu}{\beta} - B = \frac{\nu}{\gamma} - C, \quad A, B, C \text{ étant des constantes,}$$

(la valeur commune de ces nombres est nulle pour les droites G).

Beaucoup ont donné trois conditions, sans signaler leur non-indépendance, alors qu'il était visible que la famille (F) est une congruence de droites.

On a défini parfois cette congruence par les deux conditions

$$\lambda\beta - \mu\alpha = (A - B)\alpha\beta, \quad \mu\gamma - \nu\beta = (B - C)\beta\gamma.$$

en délaissant la troisième forme analogue ; ceci a conduit ultérieurement à des erreurs. Le fait si important, maintes fois signalé, qu'une variété algébrique à deux paramètres n'est pas toujours intersection *complète* de deux variétés à trois paramètres qui ont celle-ci en commun, semble encore trop ignoré.

Il apparaissait par là préférable de faire dépendre les nombres λ, μ, ν des trois paramètres homogènes α, β, γ par les formules

$$\lambda = \alpha(A - \varphi), \quad \mu = \beta(B - \varphi), \quad \nu = \gamma(C - \varphi),$$

φ est un nombre attaché de manière déterminée à chaque droite D de (F) et qui doit satisfaire à la condition $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$.

En général ceci détermine φ connaissant (α, β, γ) de façon unique, d'où une droite D de (F) parallèle à une droite donnée δ issue de O. D est rejetée à l'infini si δ est isotrope.

Toutefois lorsque α, β, γ sont tels que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \quad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour quatre directions remarquables, qui sont les directions asymptotiques isotropes de H, φ peut être pris indépendamment de (α, β, γ) . A une telle direction correspondent une infinité de droites D dont le lieu est le plan isotrope mené par la génératrice de (G), qui a cette direction isotrope.

Lorsqu'on remplace la demi-quadrique (G_1) qui sert dans la définition de la famille (F) par sa complémentaire (G) dans H, on obtient une famille (F_1) de droites symétriques de (F) par rapport à l'origine. A, B, C sont à remplacer par $-A, -B, -C$. Les droites à distance finie communes à (F) et (F_1) sont les axes Ox, Oy, Oz de H : une discussion correcte de ce sujet facile a été au-dessus des forces du plus grand nombre.

Les notes égales ou supérieures à 10, dans cette première partie, sont au nombre de 85, la moyenne générale étant de 10,8 sur 20.

Dans la seconde partie du problème intervenait, à la place de H, une quadrique Q_φ telle que ses deux demi-quadriques réglées (X_φ) et (X'_φ) se déduisent respectivement de (G) et (G_1) par les changements de A, B, C en $A - \varphi, B - \varphi, C - \varphi$. D'après les conditions données plus haut : 1° (F) et (F_1) sont invariantes par ce changement ; 2° bien mieux, quel que soit φ , (X_φ) appartient à (F) et (X'_φ) à (F_1) . Inversement toute droite de (F) est une génératrice de (X_φ) , quand on prend pour φ la valeur du paramètre de même nom qui lui répond par les formules

$$\lambda = \alpha(A - \varphi), \quad \mu = \beta(B - \varphi), \quad \nu = \gamma(C - \varphi).$$

La famille (F) est donc l'assemblage des droites appartenant à toutes les demi-quadriques (X_φ) et (F_1) a une constitution analogue. Toutefois il y a lieu d'annexer à ces demi-quadriques des variétés réglées à un paramètre obtenues pour $\varphi = A, \varphi = B, \varphi = C$. Une telle variété est un *faisceau* de droites contenant un des axes de H : au point de vue ponctuel, Q_φ devient alors un ensemble de deux plans passant par cet axe, au point de vue tangentiel un ensemble de deux points situés sur cet axe, avec symétrie, bien entendu, par rapport à O.

L'étude complète de ces cas singuliers n'a été vue par personne : il y a répugnance à s'occuper des éléments imaginaires, malgré une mention de l'énoncé, certains les qualifiant même « peu intéressants ».

La définition plus large des familles (F) et (F_1) que nous venons d'indiquer n'était en somme qu'une interprétation immédiate des équations de

ces familles, aussi l'énoncé ne la formulait pas. Elle n'a été découverte que dans treize copies.

Par contre on demandait de vérifier que le lieu des ombilics des quadriques Q_φ est formé de droites qui restent normales à ces quadriques. Le calcul a été entrepris dans un tiers des copies, mais n'est achevé nettement que dans dix-huit d'entre elles : tout au moins le fait que les plans cycliques de Q_φ ont des directions fixes a été vu le plus souvent. Cette étude se rattachait, comme deux candidats l'ont indiqué, à des points déjà vus :

Toute génératrice isotrope de (X_φ) , d'après la première partie, appartient à l'un ou à l'autre de quatre plans isotropes fixes I ; toute génératrice isotrope de (X'_φ) appartient de même à un des quatre plans isotropes analogues I_1 . Tout ombilic de Q_φ est donc sur une droite d'intersection d'un plan I avec un plan non parallèle I_1 . Ces droites sont fixes et normales à Q_φ aux ombilics correspondants.

Le lieu des douze ombilics est formé de douze droites fixes qui sont les arêtes d'un octaèdre. Ses diagonales sont les axes de H , ses faces sont les quatre plans I et les quatre plans I_1 . Les six sommets de l'octaèdre sont ceux des faisceaux plans (X_A) , (X_B) , (X_C) et (X'_A) , (X'_B) , (X'_C) . Les plans de ces faisceaux sont les plans cycliques diamétraux communs à toutes les quadriques Q_φ .

Une discussion de la nature des quadriques Q_φ , au point de vue réel, quand φ est réel, a donné lieu à de fréquentes erreurs de signe. Aussi les résultats de cette deuxième partie, délaissée sans doute en cours de route, sont très inférieurs à ceux de la première ; 26 candidats ont eu 0, 29 ont atteint la note 10, la plus haute note est 18. La moyenne s'abaisse à 5,9.

La troisième partie concernait l'étude de deux droites coplanaires appartenant l'une à la famille (F) , l'autre à la famille (F_1) . On reconnaissait immédiatement que deux droites de ces familles respectives, orthogonales entre elles, sont coplanaires et donc *perpendiculaires*. Mais inversement deux droites D et D_1 — de (F) et (F_1) — coplanaires peuvent être, ou bien rectangulaires, ou bien deux génératrices de systèmes différents d'une même quadrique Q_φ . Il en résultait, sans calcul, que la perpendiculaire commune à deux droites d'une même famille (F) ou (F_1) appartient à l'autre famille. Il n'y a exception à cette loi que lorsque les droites sont isotropes et parallèles, leur perpendiculaire commune étant indéterminée. Les droites des familles (F) ou (F_1) passant par un point donné de l'espace sont en général au nombre de trois ; celles situées dans un plan donné sont au nombre de deux. Ceci tient à ce qu'il passe par un point trois quadriques Q_φ , et que deux telles quadriques sont tangentes à un plan donné. Les cas exceptionnels reviennent à des singularités déjà signalées.

Les trois quadriques Q_φ passant par un point donné ont en commun une biquadratique, car la famille (Q_φ) est comprise dans un réseau linéaire ponctuel de quadriques. Les génératrices issues de ce point pour ces trois quadriques forment deux trièdres supplémentaires, les plans définis chacun par une arête d'un trièdre et l'arête correspondante de l'autre concourent

selon la tangente à la biquadratique précédente. Sa direction est orthogonale à la droite joignant le centre au point donné, elle est aussi conjuguée de la direction de cette droite par rapport à toutes les quadriques Q_2 .

Ce dernier point n'a été suffisamment examiné par personne. Tous les résultats découlaient à vue des études antérieures.

Cette troisième partie n'a été abordée que par 72 candidats. La moyenne y est de 3,5. On y relève une note 18, une note 15, trois notes 14, une note 13.

Dans la quatrième partie du problème on considérait deux droites perpendiculaires de la même famille (F) et le lieu de leur point de rencontre.

Deux droites D et D' de (F), orthogonales, se coupent lorsque leurs points à l'infini d et d' sont conjugués par rapport à H (ou plus généralement par rapport à une quadrique Q_2). Leur point de rencontre M est alors la projection de O sur une droite D_1 de (F_1) , qui est la perpendiculaire commune à D et D' : en effet, cette perpendiculaire commune est visiblement la droite commune aux « plans hauteurs » du trièdre formé par les droites de (F) issues de M, et on a vu dans la partie précédente que cette droite est toujours perpendiculaire à OM. Inversement soit D_1 une droite de (F_1) ; le plan mené par O perpendiculaire à D_1 coupe le cône asymptote de H suivant deux droites dont les bissectrices sont rectangulaires et de directions conjuguées relativement à H. Il y a des droites D et D' de (F) qui ont les directions de ces bissectrices et qui sont perpendiculaires ; leur perpendiculaire commune appartient à (F_1) et est parallèle à D_1 , elle ne peut donc différer de D_1 et la projection de O sur D_1 est donc commune aux droites perpendiculaires D et D' de (F).

Le lieu cherché peut donc se déterminer comme lieu des projections orthogonales de O sur les droites D_1 de (F_1) ; cette surface a pour représentation paramétrique ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ étant paramètres directeurs de D_1)

$$x = \frac{(B-C)\beta_1\gamma_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}, \quad y = \frac{(C-A)\gamma_1\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}, \quad z = \frac{(A-B)\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}.$$

C'est une surface de Steiner ; on trouve pour son équation :

$$(B-C)^2 y^2 z^2 + (C-A)^2 z^2 x^2 + (A-B)^2 x^2 y^2 - xyz(A-B)(B-C)(C-A) = 0$$

Elle coupe chaque quadrique Q_2 suivant deux quartiques de Steiner qui sont, par prévision, d'une part le lieu des projections de Q sur les génératrices de (X_2) , d'autre part la ligne de striction des génératrices de (X_2) .

Tout plan tangent à la surface de Steiner la coupe suivant deux ellipses rencontrant les droites doubles Ox, Oy, Oz . On étudie aisément, par la représentation paramétrique, ces plans tangents et les deux cônes qui correspondent à chacun d'eux, ayant pour directrices ces ellipses et comme sommet O. Le long d'un axe de coordonnées, les deux cônes ont deux plans tangents conjugués harmoniques par rapport à deux plans fixes :

$$(C-A)x \pm (B-C)y = 0 \text{ pour } Oz, \text{ etc.}$$

Précisons qu'à une droite D de (F) (distincte d'un axe Ox, Oy, Oz) correspond une seule droite perpendiculaire D' de (F).

Cette partie, appréciée plus largement que les précédentes, n'a été abordée

que dans trente compositions. Les deux meilleures comportent seules les études demandées sur la surface de Steiner ; elles ont eu 20 et 18. La moyenne est 1,6.

Une cinquième partie a été annulée par suite d'un défaut de rédaction du texte. Soient D, D' et E, E' deux couples de droites perpendiculaires de (F). Les traces des quadriques Q_p , sur le plan de l'infini, forment un faisceau linéaire ponctuel de coniques auquel les points à l'infini d et d' , e et e' des droites D et D' , E et E' sont conjugués. Toutes ces coniques sont donc harmoniquement circonscrites aux couples de points d, d' et e, e' : on sait qu'elles sont dès lors harmoniquement circonscrites à toute enveloppe du faisceau tangentiel d'ombilics d, d' et e, e' . Soit g, g' le troisième couple d'ombilics, il est donc formé de points conjugués à toutes les quadriques Q_p , et ce sont les points à l'infini de deux droites déterminées G, G' de (F), perpendiculaires entre elles.

On peut supposer, en disposant des notations pour l'ensemble g, g' , que les quatre triades $deg, de'g', d'eg', d'e'g'$ soient formées de points alignés. Il en résulte que D, E, G , par exemple, sont parallèles à un même plan ; la perpendiculaire commune aux droites D et E appartient à (F_1) et est orthogonale à G , donc elle est encore perpendiculaire à G . Ainsi chacun des quatre ensembles de droites $DEG, DE'G', D'EG', D'E'G'$ admet une perpendiculaire commune [droite de (F_1)] aux trois droites qui le composent.

On obtient ainsi un système de $6 + 4 =$ dix droites appartenant à (F) ou (F_1) et qui forment un système de Morley-Petersen, c'est-à-dire que chacune de ces droites est perpendiculaire commune à trois autres droites du système. Ces systèmes de droites liés au problème dépendent de quatre paramètres.

Dans beaucoup de compositions, la rédaction est d'une discrétion fâcheuse quand il s'agit de préciser ce que l'on cherche et aussi ce que l'on trouve. Les candidats auraient tout avantage à conclure en langage géométrique dès qu'ils estiment, dans leur for intérieur, avoir trouvé une réponse.

L'algèbre vectorielle a été employée par certains, mais avec peu de succès et de discernement. Un candidat a même démontré, en employant la formule du double produit vectoriel que deux droites formant un angle droit se coupent nécessairement, et n'a pas marqué la moindre surprise en donnant ce résultat inédit. »

Calcul différentiel et calcul intégral (M. SOULA). — « La composition de calcul différentiel était consacrée au problème suivant : Trouver les équations aux dérivées partielles de la forme $\dot{g}(x, y) = f(p, q)$, pour lesquelles les caractéristiques sont lignes de courbure des surfaces intégrales. On demandait aussi l'étude des surfaces intégrales développables et de certaines équations particulières.

Disons tout de suite que l'insuffisance des solutions obtenues n'est pas due en général à l'ignorance de la théorie des équations aux dérivées partielles : beaucoup de candidats la connaissent assez bien. Aussi la première question a-t-elle été traitée souvent de façon correcte ; elle ne demandait

que la mise en œuvre de cette théorie et la pratique de la géométrie analytique. Mais, dans la plupart des copies, il n'y a pas autre chose d'exact. Dès la deuxième partie, on se trouve en présence de difficultés qui sont proprement celles des problèmes d'analyse et non plus celles des problèmes de mathématiques spéciales. Il faut savoir à chaque instant ce qui est variable et ce qui ne l'est pas ; il ne faut pas perdre de vue que certaines quantités qui sont d'abord constantes, deviennent variables, en un certain sens, un peu plus loin. De nombreux candidats voient ces constantes et ces variables comme à travers un brouillard.

L'auteur du problème regrette vivement de n'avoir pas invité les candidats à chercher une solution explicite du premier des deux problèmes posés à la deuxième partie. Il avait cru qu'on verrait facilement la possibilité d'achever la solution. On a, dans beaucoup de compositions, ramené ce problème simple à l'ensemble des deux équations :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi(p) \frac{\partial g}{\partial x}, \quad g = f[p, \varphi(p)]$$

où g est fonction inconnue de deux variables x et y , où f est fonction connue de deux variables, où φ est fonction connue d'une variable. On peut

dire que g vérifie l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial y} + A(g) \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, où

$A(g)$ est fonction connue de la variable g .

Cette équation se laisse intégrer aisément (c'est à quoi l'on n'a pas pensé) et sa solution s'obtient en résolvant par rapport à g une équation ordinaire $B(g) = x - A(g)y$, où B est une fonction arbitraire de la variable g . Il en résulte que l'équation $f(p, q) = g(x, y)$ est équivalente à la suivante

$$x - A[f(p, q)] \cdot y = B[f(p, q)],$$

en un mot qu'elle peut être écrite sous forme linéaire en x et y .

On peut arriver au même résultat sans se servir des équations aux dérivées partielles : un candidat y est à peu près parvenu.

Réciproquement, une équation aux dérivées partielles qui ne contient pas z et qui est linéaire en x et y admet une famille d'intégrales développables, car le système des caractéristiques contient une équation de la

forme $\frac{dq}{dp} = h(p, q)$. Un seul candidat a signalé clairement cette réciproque qui résout le problème : g et f étant données, déterminer φ .

La troisième question a été abordée par la plupart des candidats, mais les erreurs sont innombrables. La principale difficulté revenait à exprimer qu'une relation $G(x, y) = F(p, q)$ était conséquence de $g(x, y) = f(p, q)$. La réponse est que G est fonction de g et que F est la même fonction de f . Un seul candidat l'a correctement démontré, d'autres l'ont admis, la plupart ont admis que l'équation $G = F$ était une identité et que F et G se réduisaient à des constantes : la première partie du problème leur avait été proposée cependant pour les mettre en garde contre cette erreur par un exemple précis. Les mêmes candidats se heurtaient alors à une incompatibilité avec l'énoncé qui donne une solution plus générale que la leur. Ils ne s'en

sont pas aperçus et se sont noyés dans les contradictions. Les solutions obscures et contradictoires de ce genre ont été considérées comme sans valeur.

Les problèmes géométriques qui constituent la 4^e et la 5^e partie ont reçu quelques réponses intéressantes. Personne n'a vu cependant que le problème principal (celui de la 3^e partie) comportait une vérification géométrique complète. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles qui expriment la propriété suivante : les surfaces intégrales d'une telle équation sont coupées par les plans P d'une famille à un paramètre sous un angle constant (qui ne dépend que du plan P considéré). Il est connu que les sections d'une surface intégrale par les plans P sont des lignes de courbure. Pour s'assurer que les lignes de courbure de l'autre famille sont les caractéristiques, il suffit de faire intervenir le cône enveloppe des surfaces intégrales passant par un point A et d'appliquer ce principe élémentaire : le plan tangent à un cône de révolution, le long d'une génératrice G coupe un plan normal à l'axe suivant une droite normale à G. Les équations obtenues à la troisième partie sont donc bien des équations (F) ; le calcul a montré qu'il n'y en a pas d'autres de la forme $f(p, q) = g(x, y)$.

Les trois dernières parties du problème n'ont eu aucun succès ; ceux qui ont écrit quelques lignes ou quelques pages à leur sujet ne sont pas arrivés à des résultats appréciables. Signalons cependant la recherche du lieu des centres de courbure (6^e). Mais les résultats exacts et précis obtenus ne concernent que l'équation de la première partie et ils étaient évidents sans calcul nouveau.

Les notes qui ont été données ne doivent pas faire illusion sur la valeur des compositions. Mais comme certaines questions étaient un peu délicates, comme il était difficile d'y répondre de façon tout à fait correcte, on a donné le maximum à des réponses qui étaient loin de la perfection. Malgré cette indulgence et bien que les trois dernières parties aient été considérées comme une sorte d'épreuve facultative, ne pouvant donner lieu qu'à un supplément de points, le nombre des copies atteignant la moyenne ne dépasse pas 9. Les deux meilleures, notées 18 et 17, se détachent nettement de l'ensemble. Le nombre des compositions notées de 6 à 9,5 est 40 ; celui qui correspond aux notes allant de 3 à 5,5 est 32 ; 54 compositions n'atteignent pas 3. Enfin 24 candidats inscrits n'ont pas composé. »

Mécanique rationnelle (M. BÉGHIN). — « 131 candidats ont pris part à l'épreuve de mécanique.

Quatre compositions ont été cotées de 0 à 0,5, dix-sept de 1 à 2, dix 2,5 ou 3, douze 3,5 ou 4, dix-sept 4,5 ou 5, onze 5,5 ou 6, dix 6,5 ou 7, huit 7,5 ou 8, cinq 8,5 ou 9, treize 9,5 ou 10, cinq 10,5 ou 11, cinq 11,5 ou 12, une 12,5 et une 13,5, deux 14, une 15, deux 15,5 et trois 16, deux 16,5, une 17 et une 18. La moyenne générale est 6,67 nettement supérieure à la moyenne (4,06) de 1933.

Le sujet comportait l'étude d'un système formé par une sphère creuse de masse négligeable, contenant à son intérieur une sphère pleine concentrique,

de rayon légèrement inférieur ; les deux sphères sont articulées l'une à l'autre suivant un diamètre commun AB ; la sphère creuse est assujettie à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe.

Ce sujet est plus classique que le sujet précédent ; et cela explique que les compositions sont meilleures.

La grande majorité des candidats ont écrit des choses sensées sur la première partie dans laquelle on demandait de mettre le problème en équations et de montrer que l'intégration se ramène aux quadratures.

Cette mise en équations, pour laquelle le choix des paramètres était imposé, pouvait se faire par plusieurs méthodes :

Les équations de Lagrange, dont l'emploi exigeait l'introduction de multiplicateurs, ne donnaient pas immédiatement toutes les intégrales premières, mais elles permettaient de parvenir aux quadratures par des calculs très simples. Le choix des angles d'Euler comme paramètres se justifiait par le rôle particulier joué par un diamètre des sphères, le diamètre AB.

Les théorèmes généraux sous leur forme courante pouvaient être utilisés en introduisant, comme inconnues auxiliaires, les composantes de la réaction de la table fixe sur la sphère creuse.

On pouvait aussi utiliser le théorème du moment cinétique pris par rapport au point de contact I de la sphère creuse et de la table ; cette méthode nécessitait une justification toute spéciale et délicate, en raison de la mobilité de ce point.

Plusieurs candidats ont employé cette dernière méthode qui donne de manière élégante, sans aucune inconnue auxiliaire (multiplicateurs ou composantes de réactions), les intégrales premières cherchées ; ils l'ont clairement justifiée, et c'est un point important à inscrire à leur actif.

Parmi ceux qui ont utilisé la méthode usuelle des théorèmes généraux en introduisant les composantes de la réaction de la table, quelques-uns ont introduit, en outre, sous une forme plus ou moins complexe, les composantes des réactions mutuelles en A et B et ont obtenu des calculs inextricables. Certains ont supposé une réaction normale au contact de la table, ce qui est en contradiction absolue avec le caractère des mouvements de roulement *sans glissement*. J'enregistre cependant une amélioration importante à ce sujet par rapport aux compositions de l'an dernier, où la même erreur pouvait être commise ; le nombre des candidats fautifs est beaucoup plus faible cette année : auraient-ils lu le rapport du Jury de 1933 ?

Quelques candidats ont supposé en A et B des réactions normales à l'axe AB, en raison de l'absence de frottement en ces points ; ceci dénote une absence totale de sens mécanique.

Les équations de Lagrange ont été appliquées en général correctement par la méthode des multiplicateurs, en raison du caractère non-holonyme des liaisons. Certains cependant ont écrit ces équations en réduisant de deux unités le nombre des paramètres, à l'aide des équations de non-glissement : c'est une méthode tout à fait erronée. Quelques-uns ont écrit les équations de Lagrange sans multiplicateurs et sans tenir compte des équations

tions de liaison, ce qui revient à admettre que la table exerce une réaction normale sur le système considéré.

Plusieurs candidats n'ont fait qu'esquisser l'intégration, ne faisant aucun effort pour simplifier leurs calculs et les mener à bonne fin. Quelques-uns paraissent avoir été arrêtés par des intégrales telles que $\int \frac{d\theta}{\sin \theta}$, $\int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$!

D'autres, pour annuler la vitesse de glissement, ont écrit l'équation compliquée qui exprime que la somme des carrés de ses composantes est nulle !...

La force vive de la sphère pleine a été calculée par plusieurs comme somme de sa force vive relative, évaluée par rapport à la sphère creuse, et de sa force vive d'entraînement ; il semble ainsi que les forces vives, dans une composition de mouvements, s'ajoutent algébriquement puisque les vitesses s'ajoutent géométriquement ; ce qui est manifestement absurde.

Plusieurs candidats ont indiqué que, dans le mouvement du système autour de son centre de gravité, le travail de la réaction de la table est nul ; c'est faux, puisque la réaction est oblique.

A noter une application erronée du théorème des aires appliqué, par rapport à l'axe AB, au mouvement de la sphère pleine par rapport à la sphère creuse. Dans plusieurs compositions, un emploi exagéré des notations vectorielles a donné lieu à des développements longs et abstraits qui n'ont pas abouti. J'ai noté plusieurs fois de grosses erreurs d'homogénéité se reproduisant constamment au cours de longs calculs : on ne devrait pas avoir à signaler d'erreurs de ce genre !...

Environ 90 candidats se sont attaqués à la seconde partie du problème, où l'on demandait d'examiner le cas particulier où l'axe AB peut devenir vertical au cours du mouvement. Bien peu ont mené correctement jusqu'au bout la solution de cette question si simple.

Dans la troisième partie, on demandait de trouver quelles conditions doit remplir le rayon de la sphère pour que le mouvement de roulement puisse avoir lieu comme il a été supposé, le coefficient de frottement étant donné. 70 candidats ont abordé cette question ; de nombreuses compositions donnent la condition qui doit être vérifiée à chaque instant. Mais une solution complète aurait dû indiquer, en fonction des données initiales, la valeur maximum que le rayon ne doit pas dépasser pour que le mouvement s'effectue sans glissement à aucun instant.

Je signale que plusieurs candidats ont supposé que la réaction de la table fait avec la verticale un angle égal à l'angle de frottement ; certains ont supposé une force de frottement proportionnelle à la vitesse du centre de la sphère et dirigée en sens inverse !

La quatrième partie était relative à l'étude d'un cas particulier. Près de 60 candidats ont écrit sur cette question, mais moins de vingt ont donné des résultats à retenir.

Dans la cinquième partie, on demandait une étude approchée d'un mouvement de faible amplitude, et un tracé approximatif de la trajectoire du centre. Sur les 25 candidats qui ont abordé cette question, il en est à peine

dix qui aient obtenu des résultats : très peu de tracés de l'hodographe, aucun tracé de la trajectoire qui cependant présentait un aspect intéressant, avec une suite de rebroussements et d'inflexions se succédant alternativement.

La dernière partie introduisait un frottement entre les deux sphères ; on demandait de montrer que le mouvement est possible avec une inclinaison constante de l'axe AB sur la verticale : une vingtaine de candidats ont abordé la question, une demi-douzaine seulement ont obtenu quelques résultats. Aucun tracé n'a été donné de la trajectoire du centre.

Trois candidats ont compris la locution « rouler sans glisser » dans un sens étroit excluant le pivotement. Cette locution était manifestement prise dans son sens général n'excluant que le glissement, comme elle l'indiquait d'ailleurs. Deux d'entre eux n'ont pas introduit de couple de résistance au pivotement, ce qui est absurde. »

Un complément important à ce rapport trouvera mieux sa place à l'occasion des épreuves orales.

Epreuves orales (1).

Des 38 candidats admissibles, trois n'ont pas participé complètement aux épreuves orales. L'état de leur santé, dûment constaté, justifie deux d'entre eux ; mais le Jury a regretté le découragement qui s'est emparé du troisième à la vue d'un sujet dont il s'est exagéré les difficultés et qui n'offrait d'ailleurs rien d'imprévu.

La moyenne générale des notes attribuées aux leçons d'élémentaires (11,37) est légèrement inférieur à celle de l'an dernier (11,87). Vingt de ces notes varient de 12 à 18 ; seize des candidats qui les ont obtenues ont été admis définitivement.

En spéciales, les notes s'échelonnent davantage. Quinze notes varient de 1 à 10, les autres de 11 à 19. La moyenne générale (11,26) est sensiblement inférieure à celle de l'an dernier (11,92). Tous les candidats qui ont obtenu au moins 11 en cette matière ont été admis, sauf un.

Une excellente leçon d'élémentaires, sur un sujet assez banal, a obtenu la meilleure note (18) : le candidat qui s'est d'ailleurs classé au premier rang a montré une précision et un soin qui caractérisent un très bon professeur. La note 16 qui vient ensuite a été donnée à trois candidats classés dans les six premiers.

Deux leçons de spéciales portant respectivement sur les coniques d'un faisceau linéaire ponctuel et sur les branches infinies de cubiques planes ont été cotées 19 et 18 ; elles ont contribué à classer leurs auteurs au troisième et au premier rang. Celui qui a obtenu la meilleure note s'est évertué à dégager tout d'abord le caractère linéaire du faisceau qu'il étudiait : on lui en a su grand gré. Poser nettement un problème avant de le résoudre est une préoccupation capitale. La note 16 qui vient ensuite a été donnée

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1934 peut être demandée au Bureau (joindre 3 francs en timbres poste).

à deux candidats dont l'un s'est classé second et dont l'autre n'a dû son succès qu'à cette supériorité d'un instant.

Notons encore que les moyennes de leçons des six premiers vont de 18 à 14. Les moyennes de ceux qui les suivent, savoir : deux 13,5, cinq 13, cinq 12,5, un 11,5, et un 10,5 montrent la contribution des épreuves orales au résultat définitif.

Après l'inventaire des forces, l'analyse des faiblesses sera peut-être plus instructive encore.

En algèbre, une leçon sur le trinôme, cotée 5, une autre sur les problèmes du second degré, notée 10, montrent que les discussions du second degré restent mystérieuses pour quelques candidats. La connaissance de règles d'une généralité contestable, qui diminuent la part de l'observation et de la réflexion, mais qui permettent de traiter honnêtement un problème de Baccalauréat, est un bagage insuffisant pour un futur professeur. La première qualité d'un objet est l'existence. Les racines d'une équation du second degré, qui dépend d'un paramètre, ne la possèdent pas forcément. Si cette qualité est indépendante de la valeur du paramètre, il est toujours intéressant de le constater *a priori* : c'est une occasion de pénétrer plus complètement la structure de l'équation étudiée. Sinon, la détermination préalable des intervalles où doit se placer le paramètre simplifie la suite de la discussion. La classification des valeurs remarquables du paramètre, par rapport à ces intervalles, en est singulièrement abrégée. L'accord réalisé entre la logique et l'utilité est un caractère des solutions bien étudiées.

En arithmétique, une leçon sur les nombres décimaux, cotée 6, dénotait une préparation insuffisante : il est inutile d'insister sur le remède. Notons cependant la persistance d'une erreur relative à la division de ces nombres. Le quotient de deux nombres décimaux se présente tout d'abord sous forme d'une fraction ordinaire ; à partir de là, la suite des opérations dépend de l'approximation décimale que l'on désire et il est vain de les codifier dans une règle qui ne tient pas compte de cette condition.

En géométrie descriptive élémentaire, une leçon sur les changements de plans et les rotations, une autre sur les rabattements et leurs applications ont été notées respectivement 7 et 10 ; elles montraient toutes deux une préparation insuffisante ou incomplète : le remède est connu. Signalons encore des traces de dogmatisme à ce propos.

La mesure de grandeurs géométriques — aires ou volumes — distingue insuffisamment la grandeur et le nombre qu'on cherche à y attacher. Les symboles primitivement distincts, qui leur sont attribués, arrivent à se confondre, à la suite d'opérations inexplicées, qui tiennent de la prestidigitation. En outre, c'est commettre au moins une faute de goût que de parler de nombres incommensurables, sous prétexte de généralité. On tombe aisément dans le verbalisme à cette occasion ; on risque de tuer dans l'œuf des curiosités qu'on aura beaucoup de peine à ressusciter quand le moment sera venu. Il serait infiniment plus utile de préciser des valeurs approchées des mesures étudiées, en comprenant les grandeurs considérées entre deux

autres grandeurs commensurables avec l'unité choisie et dont la différence pourrait — théoriquement tout au moins — être rendue arbitrairement petite. Ces observations s'appliquent en partie à une première leçon sur les aires en Seconde (note 8) et à une leçon sur les volumes de la pyramide et du tronc (note 10). Les candidats intéressés pourraient donner une excuse en invoquant les ambitions démesurées dont on retrouve des traces dans certains ouvrages d'un lointain passé.

En trigonométrie, une leçon portant sur le calcul des éléments de figures planes a été cotée 9. Le candidat l'avait singulièrement étriquée en se bornant à l'étude d'une seule figure. Le Jury, tenant compte de la nouveauté du sujet, s'est montré indulgent et n'a pas pris trop au sérieux des fautes lourdes commises dans une discussion qui se rattache au premier livre de géométrie.

En géométrie, une leçon sur les polygones réguliers (note 5) a montré que le candidat ne soupçonne pas le niveau d'une classe de Seconde. Il a semblé ignorer des faits simples et précis, dont l'absence n'a pas été compensée par une suite d'affirmations injustifiées.

Des affirmations encore dans une leçon sur l'hyperbole (note 8). La brièveté du texte sollicitait l'initiative, le jugement, l'esprit de décision du candidat, plus que sa mémoire ; il n'a pas su répondre à cet appel. Signalons aussi des obscurités ou des erreurs à propos des trièdres : la nature des sections planes d'un trièdre est encore ignorée.

Un renvoi ajouté au programme indiquait qu'une étude *directe* des coniques, au départ des notions de foyer et de directrice, pourrait être demandée. Le Jury craignant que cet avertissement n'eût pas suffisamment porté, a libellé prudemment les deux leçons qui ont été données à ce sujet : aucun des candidats n'a songé à rattacher ces textes au renvoi précité. Les notes qui leur ont été attribuées n'ont pas tenu compte d'une omission dont l'origine n'apparaissait pas nettement au Jury. Mais les futurs candidats sont avertis qu'à partir du concours de 1935, ils ne devront plus compter sur la même indulgence.

En spéciales, une leçon sur la convergence des séries de termes quelconques fourmillait d'erreurs ; la note 1 qui lui a été attribuée constitue un avertissement. Même appréciation pour la note 2, donnée à une leçon sur les trajectoires d'un mobile soumis à la loi de Newton : des développements exagérés et en partie inexacts sur le cas particulier des trajectoires rectilignes, une étude vraiment sommaire du cas général, des fautes d'homogénéité inexcusables méritaient une sanction.

Deux leçons d'algèbre portant sur la variation des fonctions ou le calcul des fonctions symétriques ont été cotées 5. Une troisième sur la division de polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes d'une variable, et une leçon relative aux notions de vitesse et d'accélération dans un mouvement curviligne ont reçu la note 6. Le même reproche peut être adressé aux quatre intéressés : ils n'ont pas fait l'effort de réflexion et de composition nécessaire pour tirer parti de connaissances incomplètes.

Un souci de rigueur intermittent, parfois inopérant, n'a pas suffi à relever une leçon sur la courbure dans l'espace, qui a été cotée 7.

La note 8 a été attribuée à trois leçons portant respectivement sur la composition des vitesses, la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, la recherche des branches infinies dans l'intersection de deux cônes. L'ordre, la sûreté même ont fait défaut aux développements des deux premières ; la dernière a présenté une lacune grave : l'expression « branches infinies » doit être interprétée dans son sens général et le candidat qui se borne à la détermination des asymptotes ne répond pas à la question qu'on lui pose.

Du désordre encore, des lacunes, du dogmatisme, dans une leçon cotée 9, sur les séries à termes positifs.

Signalons aussi une faute classique dans une exposition portant sur les lieux géométriques, qui a reçu la note 10. Après des développements exagérés sur la recherche directe de l'équation d'un lieu, le candidat a introduit *a priori* la définition du lieu au moyen de deux faisceaux de courbes dépendant du même paramètre. En fait, le plus souvent, les coordonnées d'un point du lieu étant insuffisantes pour traduire, par une équation, la propriété caractéristique de ce point, on adjoint à ces coordonnées un paramètre auxiliaire et la traduction visée se fait au moyen de deux équations. L'étude du lieu est alors ramenée à celle de ces équations, qui peut ou non comporter une élimination. Il peut se faire aussi que l'adjonction de deux paramètres soit nécessaire pour qualifier un point du lieu. On est alors conduit à l'étude de trois équations à quatre inconnues, et cette étude est une question d'espèce. On se borne souvent à relier les deux paramètres par une relation indépendante des coordonnées d'un point du lieu : le problème ainsi limité ne diffère pas théoriquement du cas où l'on utilise un seul paramètre.

Une leçon portant sur l'équilibre d'un solide gêné a obtenu également la note 10 : c'est là un sujet médiocrement traité en général et il y a lieu de reproduire ici les observations de M. BÉGHIN.

« L'une des leçons de mécanique exposées par les candidats admissibles était relative à l'équilibre des solides gênés. Je n'ai pas l'intention de relever les nombreuses fautes de logique de cette leçon ; je voudrais seulement attirer l'attention des candidats à venir sur les points suivants qui me semblent fondamentaux pour les futurs maîtres qui auront à enseigner les principes de la mécanique :

Les actions mécaniques sont de deux sortes : les actions de contact et les actions à distance ; les premières sont aussi réelles que les autres : rien n'est plus stérile que de les considérer comme de forces fictives que l'on introduit pour remplacer telle ou telle liaison ; ce sont d'ailleurs les actions de contact qui nous donnent les sensations les plus directes.

Dans les problèmes, les actions de contact sont généralement des *inconnues auxiliaires*, et c'est le point essentiel qui doit être mis en évidence dans cette leçon :

On a pu faire correspondre à toutes ces actions mécaniques des vecteurs (vecteurs-forces) qui vérifient les principes de la mécanique. Quelle que soit la méthode adoptée pour l'exposition, ces principes aboutissent à la loi suivante fondamentale de la statique :

Quand un système matériel reste immobile par rapport à certains axes (axes de Galilée) — on peut supposer des axes liés à la terre comme constituant approximativement des axes de Galilée — les vecteurs qui représentent les forces extérieures (actions de contact et actions à distance) auxquelles ce système matériel est soumis, forment un système de vecteurs équivalent à zéro (somme géométrique nulle, moment résultant nul). C'est là une condition *nécessaire* de l'équilibre.

Si l'on veut étudier l'équilibre d'un système de solides invariables en contact entre eux et avec des obstacles fixes, on essaie de trouver aux différents contacts des réactions intérieures aux cônes de frottement, vérifiant le principe de l'égalité de l'action et de la réaction pour les contacts de deux solides du système entre eux, et formant sur chaque solide avec les forces données appliquées à ce solide, un système de vecteurs équivalents à zéro.

1° Si cette recherche n'aboutit à aucune solution, il est évident que le système de solides, abandonné sans vitesses, dans la position considérée, ne peut rester immobile : l'équilibre n'a pas lieu.

2° Si la recherche donne une ou plusieurs solutions, deux cas sont à distinguer suivant qu'il y a ou non frottement : S'il n'y a pas frottement, le théorème de Cauchy sur l'intégration d'un système d'équations différentielles permet d'établir que, sauf dans des cas tout à fait exceptionnels sans portée pratique, tout mouvement est impossible et que, par suite, le système considéré reste immobile, lorsqu'on l'abandonne sans vitesses : il y a équilibre.

Dans le cas où l'on trouve plusieurs solutions, ou même une infinité, pour les composantes des réactions, la statique élémentaire ne permet pas de déterminer ces composantes. Leur évaluation relève de la théorie de l'élasticité.

Dans la classe de Mathématiques Spéciales, on n'a pas la possibilité d'établir convenablement ces conditions *suffisantes* de l'équilibre. Rien ne s'oppose à ce qu'on indique que les conditions trouvées sont suffisantes dans le cas de contacts sans frottement, comme peuvent l'établir des considérations plus élevées.

Si les contacts sont réalisés avec frottement, et si la recherche des réactions, dans les conditions indiquées ci-dessus, aboutit à une ou plusieurs solutions, on a ce qu'on peut appeler une *position théorique* d'équilibre.

Le système abandonné dans cette position restera-t-il immobile ?

Pas nécessairement ; dans certains cas, si l'on met le problème en équations en supposant que le système se met en mouvement, on pourra trouver que l'hypothèse du mouvement constitue une autre solution théoriquement acceptable.

Quel choix faut-il faire entre ces deux solutions lorsqu'on les rencontre simultanément ? Une étude précise montre qu'il n'y a aucun choix à faire : *toutes deux sont également acceptables, comme étant toutes deux réalisables pratiquement*, en choisissant convenablement l'état initial des déformations infiniment petites du corps, en coinçant plus ou moins tel corps contre tel autre, par exemple.

On voit ainsi dans le cas du frottement avec quelles précautions et avec quelle signification particulière doivent être énoncées des conditions « suffisantes. »

Epreuves pratiques (1).

Calcul numérique (M. SOULA). — « L'équation que l'on demandait de résoudre avait une racine rationnelle simple : cinq candidats ne s'en sont pas aperçus ; l'un d'eux a fait un calcul de logarithmes trop peu précis, d'autres n'ont pas eu l'idée naturelle de substituer le nombre $x = -\frac{1}{2}$. D'autres candidats ont bien vu cette racine, mais ils ont cherché l'autre racine réelle sans diviser par $x + \frac{1}{2}$.

Quelques calculs sont habilement conduits et donnent des résultats très précis, mais ils sont assez rares. On trouve en général de nombreuses erreurs et bien des négligences. En particulier les calculs de limites d'erreurs sont rédigés de façon obscure et il est difficile de les contrôler.

Les candidats qui ont abordé le calcul du rayon de courbure ont vu en général qu'on avait une approximation convenable en le prenant égal à l'inverse de la dérivée seconde. Mais là surtout, l'évaluation de l'erreur laisse souvent à désirer. »

Epure de géométrie descriptive (M. ROBERT). — « Le sujet proposé comportait essentiellement l'étude du solide S engendré par la révolution autour d'un axe vertical (O_1z') d'une portion finie H de surface gauche de révolution.

Elle a son cercle de gorge dans le plan de front F de l'axe (O_1z'), non sécant à cet axe. H est limitée à deux parallèles C_1 et C_2 de la surface gauche, symétriques par rapport à F.

Pour construire la demi-méridienne de la surface Σ limitant S, on est amené à couper H par des plans horizontaux : sur tel plan P détermine dans H un ou deux arcs d'hyperbole. La question suivante se posait : quel est l'ensemble des valeurs prises par la distance à l'axe (O_1z') d'un point variable sur ces arcs ? La recherche des valeurs limites et des maxima et minima relatifs à cette distance, doit logiquement diriger cette étude. Elle revient à considérer les parallèles d'axe (O_1z') qui dans chaque plan P rencontrent les bords C_1 et C_2 de H ou touchent cette surface. Ceux qui

(1) Voir les énoncés page 23 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1934*.

s'appuient sur C_1 et C_2 forment une même surface de révolution du quatrième degré Z.

Les lignes de niveau de H (en projection horizontale) étant des arcs d'hyperboles homothétiques et concentriques, l'hyperbole d'Apollonius relative à ces hyperboles et au point O est fixe quand P varie ; elle est décomposée, par raison de symétrie relativement au plan F, en l'axe commun à ces hyperboles et contenant le point O, et en une droite perpendiculaire à F (d'équation $y = \frac{9}{2}$). Les cercles d'axe (O_1s') tangents à la surface H en d'autres points que ceux du cercle de gorge forment une zone de révolution E engendrée par l'hyperbole K, section de H par le plan de profil $y = \frac{9}{2}$. K étant symétrique par rapport au plan de front F, E est une portion d'hyperboloïde de révolution : dans le cas de l'épure il est à une seule nappe.

On voit nettement alors que la demi-méridienne cherchée de Σ est formée de deux ovales convexes, l'une entourant l'autre ; l'ovale intérieure présente deux points anguleux. S a la forme d'un anneau percé d'un canal annulaire central. Σ est limitée, intérieurement par une portion du tore T d'axe (O_1s') engendré par le cercle de gorge de H, et par une portion de la surface L ; extérieurement par une autre portion de T et une autre portion de L raccordées avec contact par la zone d'hyperboloïde E.

Subsidiairement les candidats avaient à ponctuer la portion du solide S extérieure à une sphère donnée, qui était symétrique par rapport à l'axe (O_1s') de la sphère contenant les deux cercles C_1 et C_2 . Les intersections à déterminer, ayant un plan de symétrie horizontal et un plan de symétrie de front, donnaient lieu à des remarques classiques. Celle de la sphère avec L est formée de deux cercles égaux de front. L'intersection de la sphère avec E est projetée horizontalement selon un cercle et frontalement suivant une parabole. L'intersection de la sphère avec le tore T est une biquadratique projetée horizontalement selon une parabole de foyer O et frontalement suivant un cercle déduit par translation horizontale de la méridienne du tore. On aurait souhaité une explication graphique simple pour ces particularités, plutôt qu'un calcul analytique complet.

Sur trente-six candidats ayant pris part à cette épreuve, seize ont été complètement arrêtés par l'étude de la constitution de la surface Σ ; sept ne l'ont pas dominée assez pour donner un tracé exact de la méridienne. Ce dernier figure, plus ou moins schématique, dans treize épures. Mais les points de séparation entre courbes de nature différente ne sont pas toujours précisés ; trois candidats ont indiqué avec une suffisante netteté la nature de la surface E enveloppe de H quand H tourne autour de (O_1s') . La meilleure épure, au point de vue graphique, n'était pas étayée de considérations suffisantes, et d'une manière générale les notices, si prolixes sur des constructions d'intérêt secondaire, sont trop peu explicites sur les points importants. Il en est cependant qui développent de bonnes études des sections horizontales de S.

Plus de la moitié des candidats qui ont pu entreprendre l'intersection de Σ avec la sphère, n'ont pas su reconnaître la définition géométrique de celle-ci à travers la donnée de son rayon $R = 2\sqrt{13}$!

En somme, épreuve peu réussie, faute d'habitude à mener de front un travail logique avec des constructions graphiques. Une épreuve a mérité la note 17, deux autres la note 15, une la note 14, deux la note 12, une la note 11, et trois la note 10, soit seulement dix résultats égaux ou supérieurs à la moyenne. Puis viennent deux 9, deux 8, deux 7, quatre 5, trois 4, un 3, deux notes 2 et dix notes 1. La moyenne est de 6,5. »

Si nous constatons encore que la moyenne générale de l'épreuve de calcul est 6,1, que six candidats ont obtenu une note moyenne au moins égale à 10 pour l'ensemble de leurs épreuves pratiques, que ces candidats ont été reçus, que l'un d'eux doit son succès à cette circonstance, que deux autres se classent premier et second, nous aurons donné une idée assez nette de l'influence de ces épreuves sur le résultat final.

Au moment d'arrêter la liste d'admission, le Jury constata que vingt candidats totalisaient un nombre de points compris entre 200 (moyenne 10) et 332 (moyenne 16,6). En voici la répartition : neuf élèves ou anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, dont les quatre premiers, un auditeur à cette école, un boursier, deux fonctionnaires de l'enseignement primaire, un professeur de collège, 6 licenciés délégués dans des fonctions d'enseignement secondaire. Le total des quinze autres s'échelonnait de 182 (moyenne 9,1) à 124 (moyenne 6,2). Soucieux de maintenir la parité avec les concours précédents, le Jury décida de s'en tenir aux vingt premiers qui furent proposés à M. le Ministre pour le titre d'agrégé. De bons éléments se trouvaient d'ailleurs parmi ceux qu'une préparation incomplète, l'état de leur santé, la défiance d'eux-mêmes, un peu de malchance peut-être, ont empêché d'arriver au but. Ils seront sans doute plus heureux une autre fois.

Le Président du Jury, Inspecteur général honoraire,

E. BLUTEL.