

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1934**

Envisageons, dans un tétraèdre, les 4 sommets A, B, C, D et les pieds α , β , γ , δ des hauteurs issues respectivement de ces sommets. Le tétraèdre est défini par ses 4 sommets, lesquels peuvent être choisis arbitrairement ; en est-il de même, et comment construire alors le tétraèdre, si on veut le définir par 4 points choisis parmi les sommets A, B, C, D et les pieds α , β , γ , δ ? La question est d'ordre élémentaire lorsque les 4 points donnés comprennent 3 ou 2 sommets, et ces premiers cas constituent la première partie du thème de la composition proposée en Première, au Concours général (1). Deux autres cas en ont été exclus, l'un, celui où aucun sommet n'est donné, parce que sa solution ne relève pas des éléments ; l'autre celui où l'on donne un sommet, A, par exemple, et les pieds β , γ , δ des hauteurs issues des autres sommets, parce qu'il constitue un problème classique, la détermination d'un trièdre, connaissant son sommet A, et les projections A β , A γ , A δ , de ses arêtes AB, AC, AD sur les faces opposées, problème analogue dans sa solution comme dans son énoncé à cet autre, non moins classique, de géométrie plane, la construction d'un triangle dont on connaît les pieds des hauteurs. Reste un dernier cas, celui où l'on donne un sommet A, le pied α de la hauteur issue de ce sommet, et les pieds β , γ de deux autres hauteurs ; dans sa généralité, le problème, quoique du second ordre, serait difficilement accessible à des élèves de Première ; mais il se simplifie, et la simplification est d'importance, lorsque les données ont un plan de symétrie, soit donc lorsque A et α sont dans le plan médiateur de $\beta\gamma$. C'est l'étude de ce cas particulier qui forme le thème des deux

(1) Voir l'énoncé page 6 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1934*

dernières parties de la composition, l'une demandant une solution géométrique sans discussion, et l'autre une solution de calcul avec discussion.

La première partie constituait, dans l'esprit du Jury, un terrain d'approche, facile à explorer, fait pour assouplir à la pratique des moyens devant donner la solution des deux dernières parties. En fait, elle est la seule sur laquelle se soient arrêtés la grande majorité des concurrents, et sa seule solution, bien ordonnée et présentée, a permis à deux d'entre eux d'être récompensés. Elle réclamait d'abord des qualités d'ordre ; il s'agissait de classer les divers problèmes qui se posent, de reconnaître que, lorsqu'on se donne 3 sommets et le pied d'une hauteur, deux cas se présentent, et deux cas seulement, suivant que la hauteur est issue du quatrième sommet inconnu ou de l'un des 3 sommets connus ; de même, en se donnant 2 sommets et 2 pieds de hauteur, trois cas, suivant que les hauteurs sont issues des deux sommets connus, ou des deux sommets inconnus, ou l'une d'un sommet connu et l'autre d'un sommet inconnu. C'était manquer de vues générales, et limiter singulièrement son horizon par des notations étroites que, par exemple, de traiter successivement trois cas, comme cela s'est rencontré, lorsque, A, B, C étant d'abord donnés, on leur associe l'un ou l'autre des trois pieds α , β , γ .

L'étude demandait surtout une analyse précise et nette des conditions du problème. Toutes celles-ci se ramènent, dans tous les cas, à trois qualités, qui caractérisent le pied d'une hauteur, à savoir, pour α , par exemple, que α est dans le plan BCD, ensuite que $A\alpha$ est perpendiculaire à deux des trois droites $B\alpha$, $C\alpha$, $D\alpha$. Lorsque l'une de ces conditions, ainsi énoncée, ne porte que sur un seul sommet inconnu, elle exprime que ce sommet se trouve dans un plan déterminé ; elle conduit à la construction du tétraèdre, ou à un lieu géométrique du sommet. Lorsqu'elle ne porte que sur des sommets connus, elle indique que, ces sommets étant d'abord arbitrairement choisis, il n'en est plus de même pour le pied de hauteur, ce point devant être pris sur un certain plan ou une certaine sphère. Par exemple, lorsqu'on donne A, B, γ et δ , les trois conditions caractéristiques de γ et les trois autres concernant δ signifient chacune qu'un sommet inconnu, C ou D, est dans un plan déterminé, de sorte que chacun de ceux-ci se trouve à l'intersection de 3 plans ; d'où la construction du tétraèdre et la solution, unique en général. De même, lorsque les données sont A, B, α et γ , la donnée de γ indique que D se place dans un plan, le plan $AB\gamma$, et C sur une droite, la perpendiculaire en γ au plan précédent ; mais, parmi les conditions caractéristiques de α , il en est une, la perpendicularité de $A\alpha$ et $B\alpha$, qui ne porte que sur les données, et qui indique ainsi que le choix de α , après celui de A et B, n'est plus arbitraire, mais doit se faire sur la sphère de diamètre AB ; les deux autres signifient que C et D se placent dans un même plan, perpendiculaire en α à $A\alpha$, de sorte que C est, en général, déterminé à l'intersection d'une droite et d'un plan et que D reste indéterminé sur une droite.

La présentation et l'application de ces diverses conditions ont été données assez correctement, mais, le plus souvent, sous une forme empirique

ou inconsciente. Elle a conduit beaucoup de concurrents jusqu'aux conclusions, plus ou moins complètes, dans la première partie. Mais c'est faute d'avoir été dirigée avec unité d'esprit et de méthode, unité que, à la vérité, le Jury ne s'attendait à trouver que chez les meilleurs, que ceux qui ont attaqué la seconde partie, en sont restés, le plus souvent, à une fraction seulement des éléments donnant la solution.

La composition exigeait également la mise en action d'une autre qualité, celle de la critique permettant de découvrir toutes les circonstances possibles se présentant dans un même phénomène. Ici, comme dans la plupart des questions de géométrie de position, au cas général s'oppose toujours le cas particulier. Tel plan, par exemple, intervient, étant défini par 3 points A, B, γ ; mais il peut arriver que les 3 points soient alignés ; d'où un cas particulier intéressant, celui du tétraèdre ayant un dièdre droit, et qui, trop souvent, n'a pas été signalé. L'exception pouvait même, à son tour, avoir ses particularités ; dans le cas rappelé plus haut, de A, B, α, γ donnés, C , avons-nous dit, se place à l'intersection d'une droite et d'un plan ; il y a donc exception, et C n'existe plus, lorsque la droite et le plan deviennent parallèles, soit lorsque A, B, α, γ sont dans un même plan ; mais cette conclusion, à son tour, tombe en défaut, lorsque la droite est dans le plan, c'est-à-dire lorsque β, α, γ sont alignés ; il existe alors une double infinité de tétraèdres, dans lesquels le dièdre d'arête BD est droit et fixe, D étant arbitraire sur l'arête de ce dièdre, et C l'étant aussi sur la perpendiculaire en γ au plan $AB\gamma$; deux copies seulement ont poussé cette discussion jusqu'à cette extrême particularité.

Pareilles nuances se rencontraient également dans la seconde partie, et le texte, lui-même, ne les avait pas prévues. En saine logique, et pour rester dans l'esprit d'un sujet de composition, ce texte aurait dû se borner à demander la construction du tétraèdre, connaissant A, α, β et γ , dans l'hypothèse où A et α sont placés dans le plan médiateur de $\beta\gamma$. Par bienveillance, dans le but de donner une indication sur la recherche, l'on demandait de démontrer, pour commencer, que le tétraèdre admet le même plan de symétrie que les données. Mais il aurait fallu ajouter « en général », car cette propriété, elle aussi, comporte un cas d'exception. L'indication gardait néanmoins son prix, et la lacune n'a arrêté aucun élève ; l'un d'eux, celui qui s'est classé le premier, l'a bien compris, en arrivant à la symétrie par un raisonnement régulier qui lui faisait apercevoir le cas exceptionnel. Comme dans la première partie, l'analyse des conditions imposées par les données de α, β, γ menait à la solution : la donnée de α indique d'abord que B, C, D sont dans un plan, H , perpendiculaire en α à $A\alpha$; laissant ensuite de côté ce qui concerne D , et qui est secondaire, la donnée de β , imposant à $B\beta$ d'être perpendiculaire à $A\beta$ et $C\beta$, exige que B soit sur la droite Δ , intersection de H avec le plan perpendiculaire en β à $A\beta$, et que l'angle $\widehat{B\beta C}$ soit droit ; de même, la donnée de γ exige d'abord que C se place sur une droite Δ' , qui, d'après l'hypothèse de la symétrie, est symétrique de Δ par rapport à la trace $x'x$ du plan de symétrie sur H ; elle

demande ensuite que l'angle $\widehat{B\gamma C}$ soit droit. Dans ces conditions BC est diamètre d'une sphère passant par β et γ ; son milieu O est donc sur $x'x$; ses extrémités B, C étant respectivement sur Δ et Δ' , cette droite forme avec Δ , Δ' un triangle dont $x'x$ est à la fois bissectrice, médiane, et aussi, par conséquent, médiatrice ; c'est la symétrie annoncée, mais à condition toutefois que le triangle existe, ce qui n'est pas dans le cas exceptionnel où Δ et Δ' sont parallèles, soit donc celui où $A\beta$, $A\gamma$ sont perpendiculaires à $x'x$, ou encore $\beta\gamma$ et $A\gamma$ sécants.

Reste à terminer la construction du tétraèdre, c'est-à-dire à placer BC, question qui n'a été abordée dans aucune copie. La sphère de diamètre BC devant passer par β et γ , son centre O répond à la condition $O\beta = OB$; dans le cas général, I étant l'intersection de Δ , Δ' , le rapport $\frac{OB}{OI} = \frac{O\beta}{OI}$ est connu, et O se trouve à l'intersection de $x'x$ avec une sphère, laquelle se réduit à un plan lorsque $OB = OI$, soit lorsque Δ et Δ' sont rectangulaires. Dans le cas exceptionnel, la condition $O\beta = OB$ laisse B arbitraire sur Δ , chacune de ses positions correspondant à un point. O, intersection de $x'x$ avec le médiateur de $B\beta$; il y a une infinité de solutions.

Ainsi, dans toute cette seconde partie, l'indication de la symétrie, bien que partiellement inexacte, était précieuse ; beaucoup de concurrents l'ont retenue ; mais, obéissant à la suggestion plutôt qu'à la réflexion, leur raisonnement supposait presque toujours acquises, sans démonstration, certaines qualités, conséquences de cette symétrie.

Une troisième et dernière partie substituait à cette construction géométrique une solution de calcul en demandant de déterminer le point O, sur $x'x$, par son abscisse. Les deux conditions qui viennent de définir B, dans le plan H, peuvent se traduire immédiatement grâce à des calculs de distances de deux points, de diagonales de rectangles ou de parallélépipèdes rectangles ; elles expriment, soit l'égalité de deux longueurs, $O\beta = OB$, soit, à l'aide du théorème de Pythagore, la qualité d'un angle droit, $\widehat{B\beta C}$ ou $\widehat{A\beta B}$. Une seule composition, classée la deuxième, a traité cette partie, mais sans traiter la précédente, en ramenant correctement le problème à une équation du second degré, mais, sans doute faute de temps, sans aborder la discussion.

260 élèves ont participé au concours. Une bonne proportion, les $\frac{2}{3}$ environ, a traité plus ou moins complètement la 1^{re} partie ; la composition classée 3^e l'a fait avec beaucoup de précision, et même d'élégance. La première, dont il a déjà été parlé, s'est détachée nettement des autres, non seulement par une étude plus complète de la 2^e partie, mais aussi par sa clarté, son style sobre et rapide allant directement aux faits ; elle révèle des qualités d'intelligence, des vues d'ensemble, l'aptitude à voir un sujet de haut.

Les autres compositions récompensées sont celles qui, en donnant une solution de la 1^{re} partie, solution convenable sans être nécessairement complète dans toutes ses particularités, ont aperçu au moins une des deux

qualités essentielles, signalées tout à l'heure, conduisant à la solution de la seconde partie.

Dans l'ensemble, le Jury a cru relever quelques progrès sur les années précédentes, en ce qui concerne la présentation, le style, aussi bien que l'intelligence des raisonnements.

Néanmoins, il tient à relever encore, dans la proportion de 1 à 3, des compositions vraiment indignes d'un candidat au Concours général. Il ne devrait pas être permis de rencontrer ici des élèves affirmant que « les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes », ou que « la projection d'un sommet sur la face opposée coïncide avec l'orthocentre de cette face », ou encore que « lorsque deux plans sont rectangulaires, une droite quelconque de l'un est perpendiculaire à l'autre ». Il faut noter aussi que plusieurs sont plutôt désavantagés par des connaissances qui ne leur sont pas demandées, qui sont mal digérées ou qui les dépassent.

Il est regrettable, d'autre part, que des élèves de Première négligent l'orthographe, que l'un, ayant le texte sous les yeux, persiste à écrire « thétraèdre » dans toute sa composition, et qu'un autre jongle avec les règles d'accord grammatical en disant que « la hauteur dont le pied est connue est issu de l'un des sommets connus. »

Dans ces conditions, le Jury renouvelle un vœu déjà exprimé, celui que le fait de participer au Concours général ne soit plus mentionné au carnet scolaire de l'élève.

L'Inspecteur Général, Président du Jury,

A. TRESSE.
