

3. Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1934

Imaginons une quadrique Λ centrée en O , et le cylindre Σ qui lui est tangent le long d'une section diamétrale Γ , de plan Π .

Le cylindre a un axe de symétrie Δ qui est parallèle à ses génératrices et qui passe par O : c'est aussi le diamètre conjugué de Π par rapport à Λ .

Les plans Π' parallèles à Π découpent sur Λ des coniques Γ' homothétiques à Γ et qui sont symétriques deux à deux par rapport à O . Chacun de ces couples de coniques est l'intersection complète de Λ et d'un cylindre Σ' homothétique et concentrique à Σ .

Toute droite de Λ coupe Π en un point de Γ et touche Σ en ce point.

Toute section plane λ de Λ coupe en général Γ en deux points et touche Σ en ces points. Si son plan se déplace parallèlement à lui-même, ses axes balayent respectivement l'un ou l'autre des deux plans définis par les axes de la section centrale correspondante et par le diamètre conjugué de cette section. Les lieux géométriques des sommets des coniques λ sont alors constitués par les intersections de ces plans et de Λ . Ceux des foyers s'en déduisent par une affinité, car les coniques λ sont homothétiques et ont, par suite, même excentricité.

Soient enfin uv et u_1v_1 les cordes communes à deux coniques Γ' , Γ_1' , et à une conique fixe λ . Ces cordes étant parallèles, la figure uv_1u_1v est un trapèze : ce sera un parallélogramme si $uv = u_1v_1$. Supposons que cela soit. Le centre de ce parallélogramme est alors le centre de λ et ce centre reste fixe si on remplace le couple Γ' , Γ_1' par un autre analogue.

Tout cela prêterait d'ailleurs à discussion si l'on se bornait à une étude des éléments réels.

Cet ensemble de faits qui, à l'exception peut-être du dernier, se relient logiquement, contient toute la matière du problème proposé au concours général (1).

Mais le programme de la classe de Mathématiques ne comportant pas l'étude des quadriques, il était nécessaire de donner à ce problème des bases élémentaires et de mettre aux mains des concurrents des outils dont ils connussent le maniement. L'auteur principal de ce rapport, n'ayant guère contribué à la réalisation de ces conditions, a toute liberté pour reconnaître qu'elles ont été heureusement remplies.

Le cylindre Σ devient un cylindre de révolution, de rayon r , d'axe $S'S$, défini par une section droite (C) , centrée en O et de plan (P) . Deux droites données (D) et (E) parallèles au plan (P) et de cotes respectives h et $-h$, par rapport à ce plan, sont tangentes à Σ en des points A , B projetés orthogonalement sur (P) en des points a et b . (D) et (E) se projettent, dans les mêmes conditions, suivant des droites (d) et (e) tangentes à (C) et sécantes en un point s . Une tangente variable à (C) touche ce cercle en i et ren-

(1) Voir l'énoncé page 5 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1934*.

contre respectivement (d) et (e) en des points h et k qui sont les projections de deux points H et K situés, l'un sur (D), l'autre sur (E). La droite HK est tangente au cylindre Σ en un point I qui se projette en i .

L'ensemble (∂) des droites HK constitue la surface Λ qui s'impose dans cette étude — bien que l'énoncé ne la mentionne pas — et qui, dans l'espace, est un hyperboloïde réglé.

Voilà pour les données. Quant à l'instrument il est préparé avec un soin particulier. L'angle $(\vec{Ob}, \vec{Oa})$ est mesuré par 2θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) et l'angle

$(\vec{Os}, \vec{Oi})$ par u : le plan (P) est par cela même orienté ainsi que le cercle (C) et ses tangentes. On désigne par z la cote de I , par Z celle du point M de HK , qui se projette au point m défini par $\overline{im} = \varphi$. Enfin v mesure l'angle $(\vec{Os}, \vec{Om})$ et α l'angle $(\vec{Oi}, \vec{Om})$. Les deux variables u et φ , ou bien v et α définissent tout point M .

Dans ces conditions, on demande — c'est l'objet de la première partie — de démontrer les trois formules :

$$(1) \quad \frac{z}{h} = \frac{\sin u}{\sin \theta}, \quad (2) \quad \frac{Z}{h} = \frac{\sin u + \frac{\varphi}{r} (\cos u + \cos \theta)}{\sin \theta},$$

$$(3) \quad \frac{Z}{h} = \frac{\sin v + \cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \theta}.$$

Le passage de (2) à (1) est immédiat : il suffit d'y remplacer φ par 0. Celui de (2) à (3) repose sur les deux égalités $\frac{\varphi}{r} = \operatorname{tg} \alpha$, $v = u + \alpha$ et n'offre aucune difficulté. Il suffit donc d'établir la relation (2). Or, dans le plan parallèle à $s's$, mené par hk , deux axes de coordonnées s'imposent : ce sont la tangente is à (C) et la parallèle iz à $s's$. Les coordonnées de M , par rapport à ces axes, sont φ et Z . M est le point d'abscisse φ , situé sur la droite HK . Utilisant le fait que oh est bissectrice de $(\vec{oa}, \vec{oi})$, l'application des formules de Chasles au calcul des angles donne de suite $(\vec{oi}, \vec{oh}) = \frac{\theta - u}{2}$ à $l\pi$ près et de même $(\vec{oi}, \vec{ok}) = -\frac{\theta + u}{2}$ à $l'\pi$ près, de sorte que les abscisses de h et de k sont respectivement $r \operatorname{tg} \frac{\theta - u}{2}$ et $-r \operatorname{tg} \frac{\theta + u}{2}$. Ce sont aussi celles de H et de K dont les cotes sont h et $-h$. La droite HK étant définie par les deux points H et K passe par le point milieu dont les coordonnées sont $\frac{r}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta - u}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta + u}{2} \right)$, 0, et elle a pour coefficient angulaire $\frac{2h}{r \left(\operatorname{tg} \frac{\theta - u}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta + u}{2} \right)}$. Des formules classi-

ques de trigonométrie donnent au point milieu l'abscisse $-\frac{r \sin u}{\cos u + \cos \theta}$

et au coefficient angulaire la valeur $\frac{h}{r} \frac{\cos u + \cos \theta}{\sin \theta}$, de sorte que l'équation de HK prend de suite la forme (2).

Ce procédé offre l'avantage de ne laisser aucun doute sur la généralité des formules ; on n'en peut dire autant de ceux qui ont été employés dans la plupart des copies et dont certains exigent plusieurs pages de calculs.

A ces formules on en peut adjoindre d'autres qui définissent les coordonnées X, Y, du point m par rapport aux axes fixes Ox, Oy déterminés,

dans le plan (P), l'un par $u = 0$, l'autre par $u = \frac{\pi}{2}$. Il suffit d'utiliser l'égalité

$\vec{om} = \vec{oi} + \vec{im}$, et de projeter sur les axes indiqués. On obtient ainsi :
 $X = r \cos u - \rho \sin u$, $Y = r \sin u + \rho \cos u$ (4)

et la formule (2) devient alors $\frac{Z}{h} = \frac{Y + \rho \cos \theta}{r \sin \theta}$ (5).

Les équations (4) et (5) où l'on donne à u toutes les valeurs comprises dans un intervalle continu de 2π ($-\pi, +\pi$, par exemple), et à ρ toutes les valeurs, définissent l'ensemble des points M de la surface Λ .

Si, dans ces formules, on substitue à u et ρ les nombres opposés, X n'est pas altéré, tandis que Y et Z sont remplacés par les nombres opposés. Il en résulte que Ox (ou Os) est un axe de symétrie de Λ .

Il en est de même pour l'ensemble (δ) : deux droites homologues correspondent à des valeurs opposées de u . Ces résultats sont intuitifs géométriquement : A et B sont des points homologues, (D) et (E) des droites homologues dans cette symétrie.

Les formules (4) équivalent aux suivantes $X = \frac{r \cos v}{\cos \alpha}$, $Y = \frac{r \sin v}{\cos \alpha}$, (6), qui, jointes à (3) définissent encore la surface Λ . On voit, d'après cela, que le changement de v en $\pi - v$ (α et par suite ρ restant les mêmes) laisse Y et Z inaltérés et remplace X par $-X$; il en résulte que Λ est symétrique par rapport au plan YOS ou (R).

Enfin, les formules (5) et (6) montrent que si l'on change v en $v + \pi$ et α en $-\alpha$ (par suite ρ en $-\rho$), les nombres X, Y, Z sont remplacés par leurs opposés. Le point O est donc un centre de symétrie de Λ . On sait d'ailleurs que deux de ces symétries entraînent la troisième.

Des deux symétries de Λ par rapport à un plan et un point, il résulte que le lieu des points des droites (δ') symétriques des droites (δ) par rapport à (R), et le lieu des points des droites (δ'') symétriques des droites (δ) par rapport à O sont confondus avec Λ . Les deux ensembles (δ') et (δ'') coïncident d'ailleurs, en vertu de la remarque faite sur les trois symétries de Λ . Les droites (δ') sont tangentes au cylindre Σ à cause de sa symétrie par rapport à (R). Elles s'appuient sur les droites (D') et (E') symétriques de (D) et (E) par rapport à ce plan : il en résulte que les deux ensembles (δ) et (δ') sont distincts.

En faisant $\varphi = 0$ dans la formule (5), on constate que le point I reste dans le plan (Q) d'équation $Z = \frac{hY}{r \sin \theta}$, qui passe par Os et par la droite AB. Le lieu de I, dans ces conditions, est l'ellipse ε , intersection de ce plan sAB et du cylindre Σ ; cette ellipse passe par A et B et elle est tangente aux deux droites sA et sB. Les extrémités de son petit axe sont les points L, L' où Os coupe (C). Le grand axe est porté par la parallèle à AB, menée par O; ses extrémités ont pour coordonnées $r, \frac{h}{\sin \theta}$ et $-r, -\frac{h}{\sin \theta}$;

sa demi-longueur est donc $\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{\sin^2 \theta}}$ et la moitié de la distance focale a pour mesure $\frac{h}{\sin \theta}$. On répond ainsi à la seconde partie de l'énoncé.

Si on fixe la valeur de φ , ce qui place le point m sur un cercle (C φ) concentrique à (C) et par suite M sur un cylindre $\Sigma\varphi$, concentrique au cylindre donné et de rayon $\sqrt{r^2 + \varphi^2}$ ou $\frac{r}{\cos \alpha}$, l'équation (5) montre que M se trouve dans un plan (Q φ) parallèle au plan (Q). La trace de ce plan sur le plan (R), (ou yOz), ayant pour équation $\frac{Z}{h} = \frac{y}{\sin \theta} + \frac{\varphi}{r} \cotg \theta$, est en effet parallèle à celle de (Q). Le lieu de M, dans ces conditions, est une ellipse $\varepsilon\varphi$ homothétique à l'ellipse ε , le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{\cos \alpha}$ et les centres d'homothétie étant sur Oz. Le centre de $\varepsilon\varphi$ est sur Oz, et sa cote vaut $h \tg \alpha \cdot \cotg \theta$. — Les axes de $\varepsilon\varphi$ sont parallèles à ceux de ε et se déplacent dans les plans xOz et yOz. Les lieux géométriques des sommets de ces sections sont définis par $v = 0$ et $v = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne, pour les coordonnées des sommets, d'une part $X = \frac{r}{\cos \alpha}, \frac{Z}{h} = \cotg \theta \cdot \tg \alpha$, et d'autre part $Y = \frac{r}{\cos \alpha}, \frac{Z}{h} = \frac{1 + \cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \theta}$. L'équation du lieu des premiers, dans le plan xOz, est alors $\frac{X^2}{r^2} - \frac{Z^2}{h^2 \cotg^2 \theta} - 1 = 0$, qui définit une hyperbole η dont les sommets sont L et L'. C'est la section de Λ par le plan sOz.

Plus généralement, la section de Λ par un plan passant par Oz, soit $v = v_0$, est définie par les équations $X = Y \cotg v_0, Y = \frac{r \sin v_0}{\cos \alpha}, \frac{Z}{h} = \frac{Y}{r \sin \theta} + \cotg \theta \cdot \tg \alpha$. La projection de cette section sur le plan yOz a pour équation $\frac{Y^2}{r^2 \sin^2 v_0} - \left(\frac{Z}{h} - \frac{Y}{r \sin \theta} \right)^2 \tg^2 \theta - 1 = 0$.

La géométrie analytique nous apprend que c'est une hyperbole ayant pour diamètres conjugués Oz et la parallèle à AB menée par O . En y faisant $v_0 = \frac{\pi}{2}$ on obtient la section μ de la surface Λ par son plan de symétrie.

Quand ρ varie, l'ellipse ε_ρ engendre Λ . Toutes les ellipses ε_ρ sont symétriques, comme l'ellipse ε par rapport au plan (R) : on retrouve la symétrie de Λ par rapport à ce plan.

Les deux ellipses ε_ρ et $\varepsilon_{-\rho}$ sont placées sur le même cylindre Σ_ρ . Leurs plans sont symétriques par rapport au plan (Q) et leurs centres le sont par rapport au point O . Elles sont donc elles-mêmes symétriques l'une de l'autre par rapport à ce point : on retrouve la symétrie de Λ par rapport à O .

On répond ainsi, plus qu'il n'était demandé, aux questions posées dans la troisième partie.

D'après la quatrième, il fallait montrer qu'il existe une droite H_1K_1 passant par le symétrique M_1 de M par rapport au plan (R) , et une droite H_2K_2 passant par le symétrique M_2 de M par rapport au point O : ces faits sont des conséquences immédiates des symétries découvertes dans la première partie et retrouvées dans la troisième.

La cinquième partie est relative au lieu des points de rencontre des droites HK avec un plan tangent quelconque, mais fixe, au cylindre Σ .

Soit u_0 l'angle polaire définissant la trace de ce plan sur (P) . Une droite HK rencontre ce plan en un point M correspondant aux paramètres v et α . On voit de suite que $u_0 = v + \alpha$, de sorte que la cote du point M est donnée, en vertu de (3), par

$$\frac{Z}{h} = \frac{\sin(u_0 - \alpha) + \cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \theta}, \text{ ou, en tenant}$$

compte de $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{r}$, par $\frac{Z}{h} \sin \theta = \sin u_0 + \frac{\rho}{r} (\cos \theta - \cos u_0)$. Or

$\overline{i_0 m} = -\overline{im}$, à cause de l'égalité des tangentes issues du point m au cercle (C) et des sens positifs définis sur ces tangentes par les angles $u_0 + \frac{\pi}{2}$

et $u + \frac{\pi}{2}$.

Finalement, l'équation du lieu, dans son plan, est :

$$\frac{Z}{h} \sin \theta = \sin u_0 + \frac{\overline{i_0 m}}{r} (\cos u_0 - \cos \theta). \quad (2)'$$

Cette relation linéaire par rapport aux deux coordonnées $\overline{i_0 m}$ et Z du point M , montre que son lieu est une droite.

Si on la compare à l'équation de la droite (δ_0) située dans le même plan tangent au cylindre Σ , savoir

$$\frac{Z}{h} \sin \theta = \sin u_0 + \frac{\overline{i_0 m}}{r} (\cos u_0 + \cos \theta),$$

on constate que ces deux droites se coupent $\left(i_{0m} = 0, Z = \frac{h \sin u_0}{\sin \theta}\right)$ au point I_0 où elles touchent toutes deux le cylindre.

L'équation (2)' où l'on remplace u_0 par u définit un nouvel ensemble de droites (δ_1) dont les points constituent encore la surface Λ . Si l'on remarque que (2)' se déduit de (2) par le changement de u en u_0 et de θ en $\pi - \theta$, on voit que les droites (δ_1) s'appuient sur le cylindre Σ et sur les deux droites (D') et (E') qui résultent de (D) et (E) par le changement de θ en $\pi - \theta$. L'ensemble (δ_1) est donc identique à l'ensemble (δ') signalé dans l'examen de la première partie.

Dans la sixième partie, on considère les quatre points de rencontre de deux ellipses $\varepsilon_\rho, \varepsilon_{\rho'}$, avec un plan (τ) de cote donnée et l'on demande d'associer ces ellipses de façon que les quatre points soient les sommets d'un rectangle.

Le plan (τ) est parallèle à Ox ; les cordes MN et $M'N'$ définies dans les ellipses par ce plan sont donc parallèles à Ox et comme elles ont leurs milieux dans le plan (R) , l'un des quadrilatères ayant les quatre points comme sommets est un trapèze isocèle. Pour que ce soit un rectangle, il faut et il suffit que $MN = M'N'$. Or la longueur de MN est double de l'abscisse du point M : on est amené à trouver cette abscisse en fonction de φ et de Z . Or, φ et Z étant donnés, les équations (5) et

$$\overline{om}^2 = X^2 + Y^2 = r^2 + \varphi^2$$

définissent Y et X . On obtient de suite

$$X^2 = r^2 + \varphi^2 - \left(\frac{rZ \sin \theta}{h} - \varphi \cos \theta\right)^2, \quad \text{qui s'écrit aussi}$$

$$(7) \quad X^2 = \left(\varphi + \frac{rZ}{h} \cotg \theta\right)^2 \sin^2 \theta + r^2 \left(1 - \frac{Z^2}{h^2}\right).$$

Inversement, X et Z étant donnés, l'équation (7) définit deux valeurs de φ : ce sont celles qu'il faut associer. Leur somme $\varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{2rZ}{h} \cotg \theta$ étant indépendante de X , l'association en résulte.

L'ordonnée du centre ω du rectangle correspondant, soit $\frac{Y_1 + Y_2}{2}$, vaut, en vertu de (5), $\frac{r}{h} Z \sin \theta - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \theta$, ou $\frac{rZ}{h \sin \theta}$. Elle ne dépend que de Z . Son abscisse est évidemment nulle. Son lieu, quand Z varie, est la droite d'équation $Y = \frac{rZ}{h \sin \theta}$ dans le plan (R) . Cette droite coupe le plan $Z = h$ au point F d'ordonnée $\frac{r}{\sin \theta}$ qui est à l'intersection de (D) et (D') . Elle passe de même par le point G où se coupent (E) et (E') .

De l'équation (5) mise sous la forme $\varphi \cos \theta = \frac{rZ}{h} \sin \theta - Y$ et de $X^2 + Y^2 - r^2 = \varphi^2$, on déduit

$$X^2 + Y^2 - r^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(Y - \frac{rZ}{h} \sin \theta \right)^2 \quad (8)$$

qui définit la surface Λ par rapport au trièdre $Oxyz$.

Si l'on regarde Z comme une donnée, dans cette équation (8), on obtient la projection λ_0 , sur le plan (P), de la section λ déterminée sur la surface Λ par le plan de cote Z . Une étude de λ , à propos de la dernière partie, montrera que cette section est une conique de centre ω . On retrouve un résultat obtenu dans l'étude générale préliminaire. Le rectangle de sommets M, N, M', N' , étant inscrit dans la conique λ a même centre et mêmes axes de symétrie que cette conique. D'après cela, la droite FG est le diamètre conjugué du plan (P) par rapport à Λ . D'ailleurs F et G sont les centres des coniques dégénérées constituées dans le plan $Z = h$ par les deux droites (D), (D') et dans le plan $Z = -h$, par les droites (E) et (E').

Toutefois, le rectangle étudié n'existe que si l'équation (7) où φ est l'inconnue, a des racines. Or le minimum de X^2 , quand φ varie, s'obtient pour $\varphi = -\frac{rZ}{h} \cotg \theta$ et vaut $\frac{r^2}{h^2} (h^2 - Z^2)$.

Si $|Z| < h$, ce minimum est positif quel que soit φ : toutes les ellipses $\varepsilon\varphi$ rencontrent la conique λ .

Si $|Z| > h$, le minimum est négatif et φ ne peut varier qu'à l'extérieur des racines de l'équation obtenue en annulant le second membre de (7).

Ces résultats deviendront intuitifs après une étude plus précise des coniques λ . C'est cette étude qui est proposée dans la septième partie où l'on demande de montrer que, la cote Z d'un point M restant constante, le point m décrit une hyperbole telle que le rapport de mi à la distance du point m à une droite fixe du plan (P) est constante, de trouver enfin les lieux des foyers et des sommets de cette hyperbole lorsque Z varie.

Le transport de l'origine des axes au point ω_0 , projection de ω sur le plan (P), se traduit par les formules $X = X', Y = Y' + \frac{rZ}{h \sin \theta}$; il donne l'équation réduite de λ_0 , savoir

$$X'^2 - Y'^2 \tg^2 \theta + \frac{r^2}{h^2} (Z^2 - h^2) = 0 \quad (9)$$

qui définit une hyperbole centrée en ω_0 . Le point ω est donc bien le centre de λ .

Les asymptotes de λ_0 et de λ sont parallèles aux droites (D) et (E). Quand Z varie, celles de λ se déplacent dans deux plans qui passent par FG et qui contiennent, l'un les droites (D) et (E'), l'autre les droites (D') et (E). Toutes les coniques λ_0 sont homothétiques, la correspondance n'existant d'ailleurs que si elles sont situées dans les angles correspondants de leurs asymptotes. Les coniques λ sont homothétiques sous la même réserve. Une projection oblique, sur le plan P, parallèlement à FG , fait correspondre aux hyperboles λ des hyperboles λ_1 qui ont pour asymptotes les parallèles à (D) et à (E) menées par O .

Les axes de symétrie de λ_0 sont définis respectivement, dans le plan (P), l'un par $X = 0$ (Oy) et l'autre par $Y = \frac{rZ}{h \sin \theta}$ (parallèle à Or).

Si $|Z| < h$, c'est le second qui est l'axe transverse et cela explique que les plans des ellipses ε_z , qui sont parallèles à cet axe, rencontrent tous l'hyperbole λ .

Si $|Z| > h$, c'est Oy qui est l'axe transverse ; les plans des ellipses ε_z ne coupent λ que si z est en dehors de l'intervalle défini par ceux de ces plans qui sont tangents à λ .

La relation (5) mise sous la forme $z = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{rZ \sin \theta}{h} - Y \right)$, où l'on suppose Z donné, montre que mi est proportionnel à la distance du point m à la droite $Y = \frac{rZ \sin \theta}{h}$. Le coefficient de proportionnalité est $\frac{1}{\cos \theta}$. mi est nul lorsque m se trouve sur la droite en question, qui n'est autre que la projection de la droite suivant laquelle le plan de λ coupe le plan (Q) de l'ellipse ε . Cette dernière droite rencontre ε en des points dont l'abscisse est donnée par l'équation $X^2 = r^2 \left(1 - \frac{Z^2 \sin^2 \theta}{h^2} \right)$. Ces points n'existent

que si $|Z|$ est inférieur à $\frac{h}{\sin \theta}$; on retrouve ainsi les extrémités du grand axe de l'ellipse ε . Le cercle (C) se présente donc comme un cercle focal de λ_0 , centré sur l'axe non transverse si $|Z| < h$ et sur l'axe transverse si $|Z| > h$. Les points de contact de ce cercle et de λ_0 n'existent que si $|Z| < \frac{h}{\sin \theta}$.

L'étude des lieux des foyers et des sommets de λ_0 , quand Z varie, dépend donc de la valeur de $|Z|$ par rapport à h . Dans le premier cas $|Z| < h$, les longueurs des demi-axes et la demi-distance focale de λ_0 sont données, avec les notations usuelles, par les formules

$$a^2 = \frac{r^2}{h^2} (h^2 - Z^2), \quad b^2 = \frac{r^2}{h^2} (h^2 - Z^2) \cot^2 \theta, \\ c^2 = \frac{r^2}{h^2 \sin^2 \theta} (h^2 - Z^2) = \frac{r^2}{\sin^2 \theta} - \frac{r^2 Z^2}{h^2 \sin^2 \theta}$$

L'excentricité $\frac{c}{a}$ vaut $\frac{1}{\sin \theta}$. Les foyers sont définis par les équations

$$Y = \frac{rZ}{h \sin \theta}, \quad X^2 = c^2, \quad \text{d'où} \quad X^2 + Y^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \theta}.$$

Le lieu de ces foyers, quand Z varie, est le cercle de diamètre fg , f et g étant les projections de F et G sur le plan (P).

Les sommets étant définis par les équations $Y = \frac{rZ}{h \sin \theta}$, $X^2 = a^2$, on trouve que leur lieu a pour équation $X^2 + Y^2 \sin^2 \theta = r^2$. C'est une ellipse dont les sommets sont L, L', f , g ; elle se déduit aussi du cercle précédent par l'affinité signalée dans l'étude préliminaire.

Les lieux des sommets et des foyers des hyperboles λ résultent aisément de cette étude : ce sont des ellipses.

Dans le second cas ($|Z| > h$), les éléments métriques de l'hyperbole λ_0 sont déterminés par les formules

$$a^2 = \frac{r^2}{h^2} (Z^2 - h^2) \cotg^2 \theta, \quad b^2 = \frac{r^2}{h^2} (Z^2 - h^2), \quad c^2 = \frac{r^2}{h^2} (Z^2 - h^2) \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

Cette fois, l'excentricité vaut $\frac{1}{\cos \theta}$.

Les coordonnées des sommets de λ_0 sont alors définis par

$$X = 0, \quad Y^2 = \frac{r^2}{h^2} (Z^2 - h^2) \cotg^2 \theta, \quad \text{avec} \quad Y = Y' + \frac{rZ}{h \sin \theta}.$$

Leur lieu est porté par Oy, mais ils ne décrivent pas cette droite tout entière. La variation de Y quand Z croît de h à $+\infty$ s'étudie aisément. On constate que l'un des sommets décrit la demi-droite fy en se déplaçant toujours dans le même sens. Le déplacement de l'autre est plus complexe : partant du point f , il se rapproche d'abord du cercle (C) sur lequel il vient

lorsque $Z = \frac{h}{\sin \theta}$; puis il s'en éloigne, repasse par f pour

$$Z = h (1 + 2 \cotg^2 \theta)$$

et décrit ensuite la demi-droite fy sur laquelle se déplace le premier. Il est inutile de faire varier Z de $-\infty$ à $-\infty$: les résultats correspondants se déduisent des précédents en utilisant la symétrie par rapport au point O. Le lieu correspondant des sommets des coniques λ est l'hyperbole μ signalée plus haut.

Les foyers de λ_0 sont alors définis par les formules

$$X = 0, \quad Y^2 = \frac{r^2}{h^2 \sin^2 \theta} (Z^2 - h^2), \quad \text{avec} \quad Y = Y' + \frac{rZ}{h \sin \theta}$$

Z croissant de h à $+\infty$, le foyer le plus éloigné de O part du point f , s'en éloigne et décrit la demi-droite fy . Le plus rapproché de O est défini

par $Y = \frac{rh}{\sin \theta} \frac{1}{Z + \sqrt{Z^2 - h^2}}$, qui décroît, dans les mêmes conditions,

de $\frac{r}{\sin \theta}$ à zéro : ce foyer décrit alors le segment fO . Les deux foyers décrivent donc la droite $y'y$.

Cette étude n'épuise pas le sujet, tant sont nombreux les faits qu'imposent l'observation et la logique. On n'en demandait d'ailleurs pas tant aux concurrents et le Jury s'est montré très large dans son appréciation des copies.

Des considérations d'aspect plus géométrique, sinon plus précis, donnaient assez vite des renseignements intéressants ; il eût été commode notamment d'utiliser l'épure de la surface Λ au départ de sa définition. En fait, les candidats étaient orientés, dès le début, vers l'emploi des formules soumises à leur examen.

176 copies ont été recueillies. Le nombre des copies blanches (31) est plus grand que d'habitude.

144 candidats ont abordé la première partie : 27 d'entre eux s'en sont tenus là ; 84 seulement ont participé à la troisième, 62 à la quatrième, 32 à la cinquième ; 11 ont examiné la sixième et 6 la dernière.

Après une première lecture, faite par deux correcteurs, les notes moyennes, comptées de 0 à 20, se sont échelonnées de 0,05 à 11. Vingt-cinq copies dont la moyenne provisoire était au moins 5,3 ont été retenues en vue d'une seconde lecture par l'Inspection générale.

La révision des valeurs a donné les résultats suivants. Trois copies notées respectivement 13, 11,4 et 10,8 ont obtenu les trois prix ; deux autres notées 10, le premier accessit ; la moyenne tombe alors à 8,6 pour descendre, par degrés insensibles, à 7,2, note du dixième et dernier accessit. Les douze copies écartées, en dernière analyse, ont une moyenne variant de 7 à 5.

L'examen détaillé des vingt-cinq copies révisées permet d'ajouter quelques précisions.

Première partie. — Les notes s'échelonnent de 0 (copie n° 63) à 20 (deux copies) ; quatre seulement sont inférieures à 10 et quinze sont supérieures à 16. La correction a tenu compte des valeurs plus que des lacunes qui sont nombreuses, les questions de sens étant assez souvent mal élucidées.

Deuxième partie. — Les notes vont de 10 (une copie) à 20 (quatre copies) et douze sont supérieures à 16. C'est la partie la mieux traitée ; on doit cependant signaler un manque fréquent de précision dans l'énoncé des résultats : l'emploi de coordonnées nettement définies eût permis d'éviter ce défaut.

Troisième partie. — Les notes vont de 3 (deux copies) à 20 (une copie) et neuf dépassent 16. C'est une partie encore assez bien traitée dans l'ensemble : la moyenne est 13,4.

Quatrième partie. — Notes de 0 (deux copies) à $18\frac{3}{4}$ (1^{er} prix) ; neuf seulement dépassent 15 et neuf sont au-dessous de 10. La moyenne descend à 10,5. Les bonnes solutions s'appuient uniquement sur les symétries découvertes dans la troisième partie.

Cinquième partie. — Notes de 0 (11 copies) à $18\frac{1}{3}$ (2^e prix) ; quatre seulement atteignent ou dépassent 10 et la moyenne est inférieure à 3,7.

Plusieurs concurrents ont trouvé comme lieu — sans s'en rendre compte — les droites HK de la définition ; ceux-là se sont certainement mépris sur la valeur de leur solution.

Sixième partie. — Notes de 0 (17 copies) à 5 (3 copies récompensées) ; la moyenne est inférieure à 1.

Septième partie. — Trois copies seulement, avec les notes 1, 8 et 12 : cette dernière a obtenu le 1^{er} prix. Quant à la seconde (n° 63), l'omission de la première partie n'a pas permis de la récompenser. Le Jury l'a regretté, car, malgré cette importante lacune, elle figure au 17^e rang des copies retenues.

La copie classée au premier rang dénote une certaine habitude de la géométrie analytique : la franche introduction d'un trièdre de coordonnées a permis à son auteur — une jeune fille — de caractériser certains résul-

tats avec une précision qu'on rencontre plus rarement ailleurs. Cette supériorité dans les moyens n'a rien produit en ce qui touche la cinquième partie et n'a donné que peu de chose en ce qui concerne la sixième.

Une revue des copies écartées après une première lecture a permis de glaner quelques valeurs : certaines méritent une mention. La troisième partie a été bien traitée dans une dizaine de copies. La quatrième a été traitée par les formules dans une copie et le candidat a vu que H_1K_1 n'est pas symétrique de HK par rapport à (R), ni H_2K_2 symétrique de HK par rapport à O. La cinquième a été traitée convenablement par 7 concurrents. La septième a été abordée utilement dans trois copies et la note de l'une est comparable à la meilleure qui ait été donnée.

Un candidat a fait une épure de géométrie descriptive avec deux plans de projection : il n'a malheureusement rien tiré d'une idée qui pouvait être féconde.

Dans l'ensemble, les formules de trigonométrie sont assez bien sues. Mais il s'agit de l'élite de la classe de Mathématiques : on n'en pourrait dire autant du gros des élèves de ces classes.

On constate d'ailleurs des négligences fréquentes, pour les questions de signes, dans la première partie où l'on fait appel inutilement, et non sans danger parfois, à des propriétés de géométrie élémentaire de la figure.

Des fautes d'homogénéité fréquentes ; on lit dans une copie que le sinus d'un angle est égal à $\frac{\sin \theta}{h}$.

La signification du mot proportionnel reste encore obscure : un candidat dit que z est proportionnel à $\sin u$ et par suite à u .

A signaler encore des escamotages. A vrai dire, la tentation était forte pour ceux que leur caractère ne défend pas contre l'obsession d'un but nettement indiqué, dans les trois premières parties de l'énoncé tout au moins. Cela s'est traduit au début par des tours de passe-passe dans la manipulation des formules, puis par des raisonnements et des déductions dont l'absurdité ou l'insuffisance n'eût pas échappé aux intéressés s'ils avaient commencé par libérer leur esprit. Mais c'est sans doute trop demander à des jeunes gens, surtout lorsque leur formation ne les a pas mis en garde contre un danger dont l'importance n'est pas assez reconnue.

De nombreux exemples pourraient être donnés ; citons les plus typiques. On relève dans la seconde partie :

« Les points A, B, L, L' font partie du lieu de I. » La remarque est bonne et n'a pas été faite assez souvent. Mais, après avoir constaté que ces quatre points sont dans un même plan, l'auteur conclut que « le lieu de I est une courbe plane ». Il s'est évidemment appuyé (*in petto*) sur l'autorité de l'énoncé.

« Remarquons que le point I ne reste pas à une distance constante du plan (P). Le lieu de sa projection orthogonale i sur ce plan est le cercle (C). Il en résulte que le lieu du point I est une ellipse. » S'il avait conclu que ce n'est pas un cercle, on aurait pu souscrire à l'opportunité de sa remarque. Cette phobie du cercle est caractérisée plus nettement encore chez un autre :

« Donc I parcourt une courbe continue qui, n'étant pas un cercle, ne peut être qu'une ellipse. »

« Une courbe qui admet un centre de symétrie est une courbe plane et le centre de symétrie est dans le plan de la courbe. »

« On a $z = \frac{h}{\sin \theta} \sin u$. Or, h et θ sont fixes. On peut écrire $z = a \sin u$.

Etudions les variations de z La cote de I varie d'une façon continue entre deux cotes symétriques par rapport à (P). Ce point décrit un plan sur le cylindre. »

« La périodicité de $z = \frac{h \sin u}{\sin \theta}$ montre que le lieu de I doit admettre $s's$ comme axe de symétrie et O comme centre de symétrie. Ce lieu est donc une courbe plane. »

Mais la plus belle pièce de cette collection est sans doute la suivante : « L'angle sous lequel on voit iI de la droite Os est donc constant. » On souhaite que ce ne soit qu'un lapsus.

Les trouvailles relatives à la troisième partie n'ont rien à envier aux précédentes. Un candidat remarque que M se trouvant sur le cylindre dont le cercle lieu de m est la base et sur la surface du second ordre (?) engendrée par HK, son lieu est du 4^e degré (?) et « doit se composer de deux ellipses. » A celui-là, le séjour dans la classe de Spéciales — dont le programme paraît l'avoir séduit — sera évidemment fort utile !

« M se déduit de I par la similitude de centre O, de rapport $\frac{r}{\cos \alpha}$, d'angle α . »

« L'enveloppe de hk est le cercle (C). Donc HK enveloppe une courbe (C') dont (C) est la projection. »

« Soit F le milieu de hk . On passe de i à m par une homothétie de centre F et de rapport $\pm \frac{r'}{r}$. Le lieu de M se déduit du lieu de I par les homothéties $(F, \pm \frac{r'}{r})$. »

« Remarquons que les points m et m_1 à la distance constante r de O sont symétriques par rapport à i . Donc M et M_1 sont symétriques par rapport à I. Les lieux de M et de M_1 sont donc symétriques par rapport au plan (Q). » Quoi de plus hermétique !

Plusieurs fois, on rencontre cette affirmation : « De même que I décrit une ellipse, M en décrit une. » Les intéressés n'auraient-ils pas douté, à cette occasion, du renseignement fourni par le texte qui en annonce deux ?

On trouve dans la septième partie :

« Soit (α) un plan correspondant aux points M de même cote et (H) la courbe section par (α) de la surface engendrée par HK, surface qui est un paraboloïde hyperbolique particulier puisque ses génératrices doivent être à une distance fixe r de l'axe du cylindre.... » Le séjour du responsable dans une classe de Spéciales est également indiqué !

Pour clore cet inventaire un peu triste, terminons sur une note gaie : elle se rapporte à la première partie.

« Je choisis les conventions de l'énoncé et je choisis comme sens positif sur (C) le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le sens des tangentes est alors tel que si un mobile parcourait (C) et si, au moment où il arrivait au point de contact il n'était plus soumis à aucune force, il filerait sur la tangente dans le sens positif.

« Ceci étant dit, soit a le point où HK perce (P). » Le sens de l'humour n'est certainement pas étranger à celui qui a produit cette entrée en matière.

Concluons en disant que les résultats de cette épreuve sont honnêtes dans l'ensemble, puisque toutes les récompenses dont disposait le Jury ont pu être décernées ; mais ceux qui liront attentivement ce rapport ne seront pas surpris d'apprendre qu'aucune copie n'a paru digne de l'impression.

Le Président du Jury de correction,

E. BLUTEL.