

Sur les volumes du tronç de prisme et du tronç de pyramide triangulaires

Bien que l'exposé ci-dessous reprenne une méthode de calcul déjà signalée par M. GIRARD (1), les remarques qu'il contient — et qui ne sont sans doute pas nouvelles — pourront peut-être intéresser les professeurs de la classe de Première.

I. *Formule préliminaire relative au volume d'une pyramide.* — On sait que le volume d'un prisme, dont l'arête latérale a pour longueur l et dont la section droite a pour aire σ , est égal à $\sigma \times l$.

Considérons une pyramide ayant O pour sommet, et le polygone plan ABCD... comme base ; choisissons arbitrairement une des arêtes latérales,

(1) Voir le *Bulletin* n° 64, page 119.

OA par exemple, et menons par les sommets B, C, D... les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, ...équivalents à $\overrightarrow{AO}$. Les points A, B, C, D..., O, B', C', D'... sont les sommets d'un prisme ayant OA pour arête latérale ; désignons par σ_A l'aire de la section droite de ce prisme. Le volume de la pyramide OABCD... est égal à :

$$\frac{1}{3} \times OA \times \sigma_A$$

II. *Volume du tronc de prisme triangulaire.* — Considérons un tronc de prisme triangulaire dont les arêtes latérales sont AA', BB', CC'. Soit σ l'aire de sa section droite.

Le volume de ce tronc de prisme est égal à la somme des volumes des trois pyramides A'ABC, BA'B'C', CA'BC'. Evaluons les volumes de ces trois pyramides, au moyen de la formule préliminaire, en prenant comme arêtes latérales particulières de ces trois pyramides respectivement A'A, BB', CC'. Dans ces conditions, les trois prismes correspondants ont tous les trois leurs arêtes portées par les droites AA', BB', CC' : ils ont donc la même surface latérale, et, par conséquent, la même section droite que le tronc de prisme donné.

Il résulte de la formule préliminaire que :

$$\text{vol. (A'ABC)} = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \sigma$$

$$\text{vol. (BA'B'C')} = \frac{1}{3} \cdot BB' \cdot \sigma$$

$$\text{vol. (CA'BC')} = \frac{1}{3} \cdot CC' \cdot \sigma$$

Donc le volume du tronc de prisme triangulaire est égal à :

$$\frac{1}{3} \cdot \sigma \cdot (AA' + BB' + CC')$$

Remarque. — Les deux pyramides (B'ABC), (C'ABC) ont des volumes respectivement égaux à :

$$\frac{1}{3} \cdot BB' \cdot \sigma \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \cdot CC' \cdot \sigma,$$

comme le montre l'application de la formule préliminaire. On retrouve ainsi la formule classique donnant le volume du tronc de prisme triangulaire :

$$\text{Vol. (ABC A'B'C')} = \text{vol. (A'ABC)} + \text{vol. (B'ABC)} + \text{vol. (C'ABC)}.$$

III. *Volume du tronc de pyramide triangulaire.* — Soit ABC A'B'C' un tronc de pyramide triangulaire (à bases parallèles) dont les arêtes latérales sont AA', BB', CC'. On suppose essentiellement les deux plans de base d'un même côté du sommet de la pyramide.

On peut décomposer le volume du tronc en la somme des 3 volumes A'ABC, BA'B'C', CA'BC', que nous représenterons respectivement par v , v' et v'' .

La formule préliminaire permet de comparer facilement les volumes τ et τ'' : prenons, en effet, comme sommets respectifs des deux pyramides les points A et C', de façon qu'elles aient une base commune A'BC ; elles ont alors les arêtes latérales AC et C'A' parallèles, et, par suite, les sections droites correspondantes des prismes construits à partir du triangle A'BC, parallèlement aux arêtes AC et C'A' sont les mêmes.

Donc
$$\frac{\tau''}{\tau} = \frac{C'A'}{CA}$$

On compare de même τ' et τ'' , en considérant que les deux pyramides ont une base commune BA'C', et deux arêtes latérales B'C' et BC parallèles :

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \frac{B'C'}{BC}$$

L'égalité des seconds membres entraîne :

$$\tau''^2 = \tau.\tau'$$

d'où l'on déduit la formule classique.

L. GARNON,

Professeur au Lycée Condorcet.
