

DEUXIÈME PARTIE

Sur les volumes de la sphère et du segment sphérique

Voici une méthode, qui n'est peut-être pas inédite, pour la détermination des volumes de la sphère et du segment sphérique analogue à celle que l'on emploie pour le volume de la pyramide ; elle évite de recourir au volume du triangle tournant et je pense qu'on pourrait ainsi gagner une heure.

Soit un quart de cercle AOB, limité par les rayons OA, OB et l'arc AB.

Partageons OB en n parties égales et soient $B_1, B_2, B_3, \dots$ les points divisions (les indices allant en croissant de O vers B). Par ces points menons $B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3, \dots$ parallèles à OA coupant l'arc aux points $A_1, A_2, A_3, \dots$. Traçons les vecteurs $A_1C, A_2C_1, A_3C_2, \dots$ équipollents au vecteur B_1O . Nous formons ainsi $(n-1)$ rectangles intérieurs au quart de cercle AOB. Si nous construisons les vecteurs $AD_1, A_1D_2, A_2D_3, \dots$ équipollents au vecteur OB, nous aurons n rectangles que nous qualifierons d'extérieurs au quart de cercle AOB. Faisons tourner la figure autour de OB, nous obtenons deux ensembles de cylindres, cylindres extérieurs et cylindres intérieurs, dont la différence des volumes est égale au volume du cylindre engendré par le rectangle AOB₁D, c'est-à-dire à $\frac{\pi R^3}{n}$. Cette différence tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

La somme des volumes des cylindres extérieurs est

$$\frac{R}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \pi \left[R^2 - \frac{(k-1)^2 R^2}{n^2} \right]$$

ou
$$\pi R^3 - \frac{\pi R^3}{n^3} \sum_{k=1}^{k=n} (k-1)^2 = \pi R^3 \left[1 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right]$$

Cette somme a une limite égale à $\frac{2}{3} \pi R^3$ quand n tend vers l'infini.

La somme des volumes des cylindres intérieurs a la même limite, d'après la remarque précédente. Cette limite commune sera par définition le volume de la demi-sphère engendrée par le quart de cercle AOB tournant autour du rayon OB.

N. B. — On peut commencer par le volume d'un segment sphérique dont l'une des bases est un grand cercle, on obtient :

$$\pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{3} \quad h \text{ étant la hauteur.}$$

Et enfin on déduit de cette formule la mesure du volume d'un segment sphérique quelconque,

$$\pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} (x^2 + xy + y^2)$$

h étant la hauteur, x et y les mesures algébriques des distances du centre aux bases.

M. PASQUALINI,
Professeur au Lycée de Rabat.