

VI. Documents officiels

6. Rapport sur le Concours en 1932

de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)

Le nombre des candidats inscrits s'est élevé à 143, soit une augmentation de 21 par rapport à l'an dernier. 135 ont participé à la première composition, au lieu de 106, ce qui n'est pas sans compliquer la tâche des correcteurs.

Il devient de plus en plus difficile, à ceux qui ont la licence pour tout bagage scientifique, d'obtenir un poste dans l'enseignement des mathématiques. Trois simples licenciés ont bénéficié d'une délégation dans les cadres réguliers, l'an dernier, après un long stage dans la surveillance ; on n'en peut prévoir plus d'un cette année.

La participation, sinon le succès, aux épreuves de l'agrégation, est devenue le moyen le plus sûr de se distinguer de la masse des candidats professeurs. Il est vrai que la faiblesse se révèle, au même titre que la force, à cette occasion, et il pourrait être imprudent de se soumettre à un jugement nécessairement sévère sans une préparation suffisante. Une impression médiocre, résultant d'un concours malheureux, peut d'ailleurs se racheter lors d'une tentative nouvelle ; mais un candidat qui aurait mesuré une première fois l'éloignement du but, ne devrait se présenter de nouveau qu'après de vigoureux efforts pour s'en rapprocher.

Le nombre des candidats nouveaux, 62 au lieu de 45 l'an dernier, a augmenté proportionnellement plus encore que celui des concurrents, 46 o/o au lieu de 42 o/o.

Dans l'ensemble, la répartition est la suivante (le nombre entre parenthèses est celui des admissibles) :

15 élèves de l'école normale supérieure, dont une jeune fille et un étranger (13) ; 1 censeur (0) ; 2 professeurs licenciés titulaires de lycée (2) ; 18 professeurs licenciés titulaires de collège (3) ; 11 professeurs licenciés délégués de lycée ou de collège (4) ; 11 professeurs d'école normale ou d'école primaire supérieure (1) ; 17 boursiers (5) ; 16 étudiants libres (5) ; 31 répétiteurs (3) ; 6 maîtres d'internat (0) ; 2 auditeurs à l'école normale supérieure (1) ; 5 candidats sous les drapeaux (2).

Epreuves écrites (2).

Le nombre maximum, prévu pour l'admission, était 22. La moyenne du premier admissible étant 14 environ, à l'écrit, celle du 22^e s'est

(1) Le Jury était composé de MM. BLUTEL, inspecteur général, président ; TRESSE, inspecteur général, vice-président ; BÉGIN, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; SOULA, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier ; HENNEQUIN, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Buffon.

(2) Voir les énoncés pages 15 et suivantes des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1933*.

abaissée à 7. Le Jury a estimé qu'il pouvait descendre jusqu'à 6, ce qui a donné 38 admissibles, non compris le candidat étranger, classé à part.

Cette moyenne limite est comparable à celle des concours précédents ; un de ceux qui l'ont obtenue a d'ailleurs été admis. Deux candidats admissibles à des concours antérieurs se sont classés au 39^e rang, avec 4 autres ; le Jury lié par la stricte observation de l'anonymat des copies et craignant d'étendre sa tâche au point d'en compromettre l'exécution, n'a pu prolonger la liste au-delà du 38^e. Dix anciens admissibles ont une moyenne inférieure à 6 ; certains se sont même classés très loin ; les conditions défavorables où ils se trouvaient, pour parfaire leur préparation, suffiraient à l'expliquer. Dix-huit admissibles étaient des candidats nouveaux et, parmi les vingt autres, la moitié étaient d'anciens admissibles.

Des rapports particuliers, dus aux correcteurs, sont extrêmement fouillés ; ils donneront aux intéressés une idée précise de ce qu'il convenait de faire.

Mathématiques élémentaires (M. TRESSE). — « Un déplacement hélicoïdal (H) est envisagé. Peut-il se décomposer en deux rotations ? De quelles indéterminées dépend cette décomposition ? Comment sont distribués les axes de ces rotations suivant certaines conditions imposées, soit que l'une des rotations se réduise à un renversement, ou, plus généralement, que son angle soit donné, soit que les deux rotations aient des axes égaux ? Telle est la matière de la composition de Géométrie élémentaire, matière que les meilleurs se sont montrés aptes à cultiver spontanément, sans s'embarrasser des fils directeurs mis dans le texte à la disposition de tous.

Que la décomposition soit possible, la première partie du sujet donnait un processus permettant de l'établir. C'est aussi ce qui résulte d'un raisonnement classique : choisissant un point quelconque P dans l'espace, le déplacement (H) peut s'effectuer par une première rotation amenant P en son transformé P_1 , suivie d'un nouveau déplacement qui, devant laisser fixe P_1 , consiste en une rotation dont l'axe passe par P_1 . D'une manière plus précise, envisageant un vecteur quelconque $\overrightarrow{PQ}$ et son transformé $\overrightarrow{P_1Q_1}$, on peut choisir la rotation (Δ) d'une manière et d'une seule, de façon qu'elle amène $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{P_1Q_1}$, et la seconde rotation (D_1) a pour axe P_1Q_1 .

Envisageons ce fait sous divers aspects. D'abord la droite D_1 , axe de (D_1) peut-être choisie arbitrairement ; la décomposition de (H) en un produit (Δ)(D_1) de deux rotations, est déterminée d'une manière unique dès que l'on donne l'axe D_1 de la seconde rotation ; il l'est aussi, car on peut raisonner de même sur le déplacement inverse de (H), quand on donne l'axe Δ de la première rotation ; il y a ainsi une correspondance biunivoque entre les droites de l'espace.

Ensuite, en décomposant le déplacement inverse, comme le premier, et en amenant d'abord P_1Q_1 sur PQ , (H) est décomposé en le produit

$(D)(\Delta)$, (D) étant une rotation d'axe PQ ; donc $(H) = (\Delta)(D_1) = (D)(\Delta)$; quand on se donne l'axe Δ de l'une des deux rotations, l'angle de de cette rotation est le même, qu'elle soit la première ou la seconde de la décomposition. En outre, les deux rotations (D_1) , (D) associées à cette même rotation (Δ) et différant par leurs axes D_1 , D , ont le même angle, ces axes se correspondant dans (H) .

Revenons à la correspondance entre les axes δ , δ' , de la décomposition que nous écrivons maintenant $(H) = (\delta)(\delta')$: aux axes δ passant par un même point P , correspondent les axes δ' situés dans un même plan Π , médiateur de PP_1 ; aux axes δ situés dans un même plan Π , lequel est, en général, médiateur d'un déplacement PP_1 , correspondent les axes δ' passant par un même point P_1 . La correspondance associe un point P à un plan Π , un plan Π à un point P_1 ; c'est une corrélation (Γ) dont le carré est le déplacement (H) .

Un fait essentiel apparaît : toutes les rotations (δ) et (δ') dont les axes sont dans un même plan Π amènent toutes un certain point P en un même point P_1 . Si ces rotations sont des renversements, leurs axes, situés dans un plan Π , forment un faisceau ayant pour sommet P' , milieu de PP_1 . Les réciproques nécessaires étant facilement justifiées, ces axes de renversement forment donc un complexe linéaire dans lequel les plans Π et les points P' de l'espace se correspondent, le premier étant le plan du complexe du second, le second étant le foyer du premier.

Quand aux rotations associées à ces renversements, leurs axes forment aussi un second complexe linéaire, transformé du précédent dans la corrélation (Γ) ; le plan Π se transformant en P_1 , et le point P' en Π' , médiateur de $P'P'_1$, ou encore de PP_2 , P'_1 et P_2 étant les transformés, dans (H) , de P' et P_1 , ce point P_1 et ce plan Π' qui, l'un et l'autre, peuvent être choisis arbitrairement dans l'espace, sont ceux qui se correspondent dans ce second complexe linéaire. Ce second complexe, comme le premier, est indépendant du rang donné au renversement dans la décomposition.

Ceci amène une conséquence. A un même renversement (D) correspondent deux rotations (δ) , (δ') , telles que $(H) = (\delta)(D) = (D)(\delta')$ et que, par conséquent, le produit $(\delta)(\delta')$ constitue une décomposition du déplacement $(H)^2$, et cette décomposition est faite, avons-nous vu plus haut, en deux rotations de même angle. Inversement, il y a deux déplacements (H') , (H'') , dont le carré est équivalent à (H) ; ils ont même axe que (H) et sont définis par la translation α et la rotation α ou $\alpha + \pi$, si 2α et 2α sont la translation et la rotation de (H) . Dans ces conditions, le complexe des axes de deux rotations égales, dont le produit donne (H) se décompose en deux complexes linéaires, ceux des axes associés à des renversements dans chacun des déplacements (H') , (H'') .

Généralisons l'étude des renversements, et supposons que l'une des rotations du produit $(H) = (\delta)(\delta')$ ait un angle donné quelconque. Les axes de ces rotations forment un nouveau complexe ; ceux qui sont

situés dans un plan Π sont ceux d'où l'on voit le vecteur $\vec{PP}_1$ sous l'angle constant donné ; la courbe du complexe, qui est leur enveloppe, est un cercle de centre P' , d'axe PP_1 . Le cône du complexe apparaît moins facilement ; aucun candidat n'est arrivé à le déterminer, bien que le texte ait annoncé la nature de ce cône et qu'il ait suggéré d'étudier auparavant la courbe du complexe. La recherche se rattache à cette courbe en étudiant les génératrices du cône situées dans un plan quelconque Σ mené par le sommet P' ; ces génératrices sont les tangentes, issues de P' , au cercle, courbe du complexe du plan Σ ; à supposer que l'angle donné varie, ce cercle varie sans changer de centre, et les tangentes varient en conservant les mêmes bissectrices ; l'une de ces dernières correspond au cas où le cercle se réduit à un point, où la rotation envisagée est un renversement ; elle est donc à l'intersection de Σ et du plan Π correspondant à P' ; ce plan Π et son axe PP_1 sont alors également inclinés sur les deux génératrices du cône ; c'est donc, Σ étant arbitraire, que deux génératrices de ce cône sont également inclinées sur PP_1 , ou enfin que ce cône est de révolution autour de PP_1 . Un calcul simple donne son angle, en choisissant comme plan Σ le plan passant par PP_1 et par la perpendiculaire abaissée de P' sur l'axe de (H) ; ce cône n'existe pas lorsque l'angle 2θ de la rotation donnée est inférieur à l'angle 2α de la rotation de (H) et que la distance de P' à l'axe de (H) est inférieure à une limite, $\alpha \sqrt{\cotg^2 \theta - \cotg^2 \alpha}$.

Quant au complexe des seconds axes, il est le transformé du précédent dans la corrélation (Γ), et sa courbe qui était seule demandée, est la transformée du cône précédent. Supposons que l'angle donné soit celui de la première rotation ($\tilde{\theta}$) et que l'axe $\tilde{\delta}$ de celle-ci décrive le cône précédent, de sommet P' . L'axe $\tilde{\delta}'$ se déplace dans le plan Π' , médiateur de $P'P_1$. La rotation d'angle constant ($\tilde{\theta}$) amène P , qui est sur l'axe du cône, en un point Q qui décrit un cercle de même axe PP_1 ; la rotation ($\tilde{\theta}'$) amène ensuite Q en P_1 ; son axe est l'intersection de Π' et du médiateur QP_1 , et ce médiateur, qui passe constamment par P' , enveloppe le cône supplémentaire du cône de sommet P_1 décrit par QP_1 ; les deux cônes sont de révolution autour de PP_1 ; la courbe du complexe des axes $\tilde{\delta}'$, dans le plan Π' , est donc la conique, trace sur ce plan du premier de ces cônes. Cette conique est, par exemple, une hyperbole, lorsque le cône corrélatif lieu des axes $\tilde{\delta}$, a des plans tangents dont les corrélatifs sont rejetés à l'infini, donc des plans tangents parallèles à l'axe de (H), ou encore lorsque le demi-angle d'ouverture de ce cône est inférieur à l'angle de son axe avec l'axe de (H) ; le calcul indiqué plus haut montre que la courbe existe et qu'elle est une ellipse pour $\theta > \alpha$, qu'elle est une parabole pour $\theta = \alpha$, et enfin, que pour $\theta < \alpha$, elle n'existe que si l'inclinaison du plan Π' sur l'axe H est suffisamment petite, et qu'elle est alors une hyperbole.

Telle est la matière qu'avaient à développer les candidats. Ils ne l'ont pas fait avec succès. La plupart, 85 sur 135, n'ont pu aller au

delà d'une première partie, simple préambule fait pour leur donner des indications. La construction du déplacement PP_1 , connaissant son milieu P' ou son plan médiateur Π , qui était d'abord demandée, devait être immédiate ; elle avertissait de l'importance de ces éléments. La décomposition de (H) en deux renversements, proposée ensuite, est classique, et les non initiés la découvriraient de suite en étudiant le déplacement d'un point soumis à deux renversements successifs. Enfin, la décomposition en deux rotations, qui termine ce préambule, est moins connue ; l'ordre du texte y amenait par une voie qui a été suivie par beaucoup, et qui consiste à ramener un produit $(\delta)(\delta')$ de deux rotations quelconques à un produit de deux renversements en décomposant chacune d'elles, de même qu'on vient de le trouver pour un déplacement hélicoïdal, en deux renversements, ceux-ci étant choisis de façon que les deux renversements intermédiaires soient identiques, leur axe étant donc la perpendiculaire commune AA' aux axes δ, δ' . Le résultat concrétise en quelque sorte la forme générale de la décomposition, en la rattachant aux perpendiculaires communes $AA', IA, I'A'$, entre δ et δ' , H et δ , H et δ' , H étant l'axe de (H) ; A est un pied commun aux deux premières, A' aux deux dernières ; $\overline{II'}$ et $(IA, I'A')$ représentent en grandeur et sens, la demi-translation α et la demi-rotation α de (H) ; (AI, AA') et (AA', AT') représentent de même les demi-angles des rotations (δ) et (δ') . Cette représentation met en évidence bon nombre de résultats signalés plus haut, tels que la correspondance entre δ et δ' , l'angle unique de la rotation attachée à une même droite. Il y avait ainsi deux points de vue se complétant mutuellement, qu'il y avait avantage à utiliser tour à tour, plutôt que de s'en tenir systématiquement à un seul.

Il semble que la théorie des déplacements ne soit pas de celles sur lesquelles les candidats se seraient sérieusement exercés. Dans l'étude des axes passant par un point ou situés dans un plan, ils n'ont pas vu l'importance du déplacement qui laisse fixe un point, et se réduit à une rotation autour d'un axe passant par ce point. Lorsqu'ils définissent une rotation en disant qu'elle amène une droite D sur une autre D_1 , ils ne précisent pas en ajoutant comment se correspondent les points de ces droites. Beaucoup, avec raison d'ailleurs, ont utilisé la décomposition en produits de renversements, ou de symétries planes, des déplacements, rotations et translations ; mais, mal éclairés sur la signification de ce mot de produit, ils ne prennent pas les précautions voulues en associant ou permutant ces opérations ; il y a là un chapitre de géométrie sur lequel les candidats feront bien de réfléchir.

Un point de ce chapitre concerne les notions d'orientation. Elles s'imposent à propos d'un déplacement hélicoïdal, et cependant, aucune composition n'a su en préciser nettement le rôle. Un déplacement hélicoïdal est donné ; il permet de distinguer un sens sur l'axe du déplacement ainsi qu'un sens de rotation autour de cet axe, ceux de la translation et de la rotation qui constituent le déplacement ; il permet

donc de choisir un sens d'orientation de l'espace. Ce n'est pas ainsi qu'on le comprend. L'un suppose l'axe H orienté vers le haut ; un autre parle d'un angle égal à $-\alpha$ sans avoir dit quel est le sens positif choisi ; celui-ci admet que la rotation s'effectue de gauche à droite ; celui-là croit qu'il y a un sens direct, imposé dans l'espace, indépendant du déplacement. Beaucoup se taisent sur ce point, n'y apportent aucune précision, et laissent ainsi soupçonner ou déclarent même que les problèmes de construction du déplacement PP_1 admettent plusieurs solutions, alors qu'ils n'en ont qu'une.

Après l'insuffisance dans les connaissances, l'insuffisance dans le jugement est plus grave. Les affirmations, les observations incomplètes sont fréquentes ; le souci de distinguer entre le nécessaire et le suffisant n'apparaît pas. Ces faiblesses se rencontrent dès les premières lignes, à propos des constructions de PP_1 ; nous aurions pu ici répéter le paradoxe de BERTRAND qui se flattait de classer les candidats à Polytechnique sur les cas d'égalité des triangles, et notre classement, sur ce simple préambule, n'eût pas différé sensiblement du classement final. Beaucoup ont énoncé la construction sans nulle justification ; chez les autres, les explications sont incomplètes ; telle droite est donnée comme une perpendiculaire commune, sans que cette qualité soit justifiée ; en dehors des deux premiers, aucun ne mentionne qu'il fait appel à la qualité du déplacement, en utilisant l'égalité de longueurs ou d'angles. De futurs professeurs devraient savoir qu'aucun fait ne peut être accepté, tant qu'il n'est pas rattaché aux hypothèses. Puis les constructions sont établies en traduisant uniquement le caractère nécessaire de certaines conditions ; la préoccupation de s'assurer si elles sont suffisantes n'a retenu que le premier du classement ; elle aurait averti de leur erreur ceux qui, n'observant pas complètement les conditions d'orientation, aboutissaient à plusieurs solutions et non à une seule.

Cette même faiblesse a été surtout sensible à propos de la décomposition de (H) en deux rotations. Les candidats se partagent presque en deux groupes. Les premiers, ne s'occupant que des conditions nécessaires, se donnent un premier axe de rotation, puis cherchent et trouvent comment il faut en placer un second, mais ne s'assurent pas qu'ils réalisent ainsi le déplacement (H) . Les seconds font l'inverse ; pressentant le résultat d'après les indications du texte, ils partent du déplacement, décomposé en deux renversements ; ils y introduisent *a priori* deux renversements intermédiaires identiques, autour d'une sécante commune aux axes des deux premiers, choisie arbitrairement ; ils arrivent ainsi à la solution ; mais ils ne se demandent pas si elle est la seule. Et cela conduit quelques-uns à une faute curieuse. Partant également du produit de deux renversements, ceux-ci décomposent chacun des renversements en deux symétries par rapport à des plans rectangulaires menés par l'axe ; ils prennent bien la précaution indispensable de choisir les symétries intermédiaires de façon que leurs plans soient rectangulaires et arrivent ainsi très correctement à un

produit de deux rotations ; malheureusement les caractères utilisés n'étant que suffisants, leur solution n'est pas la plus générale ; elle n'est qu'une solution particulière, celle dans laquelle les axes des deux rotations sont rectangulaires.

Les réciproques sont trop fréquemment négligées, omises ou incomprises. Ainsi, aux droites δ passant par un point P correspondant des droites δ' situées dans un même plan II, médiateur de PP_1 ; ceci est aperçu assez facilement. Le point délicat est d'établir que, réciproquement, toute droite δ' du plan II correspond à une droite δ passant par P ; ou bien on le néglige, ou bien on le confond avec la recherche des droites δ' correspondant aux droites δ d'un même plan ; effectivement la question se ramène bien à celle-ci, en échangeant les données ; mais encore faudrait-il le dire. Il y avait ici de fines nuances, provenant des rôles distincts des axes δ et δ' , nuances qui se retrouvent également à propos des axes de renversement, qui ont été peu perçues, mais qui ont donné aux meilleurs l'occasion de se révéler.

Nous croyons devoir insister enfin sur la forme des compositions. Les rédactions sont peu soignées. Certains omettent totalement la ponctuation ; rien ne sépare chez eux des propositions différentes ; le correcteur doit rechercher si telle ligne est la conclusion de ce qui précède ou la préparation de ce qui suit. L'écriture est illisible, les notations indéchiffrables ou interverties, il faut, pour comprendre un texte, s'inspirer de quelques mots, développer à part le raisonnement, et relire ensuite pour déchiffrer ce que l'on s'attend à trouver. Les notations symboliques, qui se substituent aux expressions de parallèles, perpendiculaires, par rapport, se multiplient, fantaisistes, aussi nombreuses que dans l'Indicateur des chemins de fer.

Résumons-nous en quelques chiffres. Après deux bonnes notes de 17 et 16,5, 12 notes seulement s'échelonnent de 14 à 9,5, atteignant la moyenne ; les 15 suivantes, témoignant d'une certaine valeur, s'accumulent de 8,5 à 7, 15 autres de 6,5 à 5, et, après une coupure autour de cette dernière note, 39 copies sont cotées de 4,5 à 2,5 et 52 de 2 à 0. »

Mathématiques spéciales (M. HENNEQUIN). — « La composition de mathématiques spéciales dont le sujet, portant sur la géométrie analytique plane seulement, apparaissait moins chargé de difficultés que les années précédentes, n'a pas donné les résultats qu'on était en droit d'espérer. Aucune note supérieure ou égale à 14 n'a pu être attribuée : deux 13 1/2, un 13, un 12 1/2, deux 11, un 10 1/2, six 10 ont été les meilleures notes, c'est-à-dire que, sur 133 candidats qui ont composé, treize seulement ont atteint la moyenne ; trois autres en approchent avec 9 1/2 ou 9 ; six arrivent à 8 ou 8 1/2, dix à 7 1/2 ou 7, treize à 6 1/2 ou 6, seize à 5 1/2 ou 5 ; il reste 72 notes inférieures à 5, dont 58 inférieures à 4, quarante inférieures à 3, vingt inférieures à 2, dix inférieures à 1, deux égales à 0. La moyenne est 4,8.

Il nous faut malheureusement répéter les mêmes critiques générales : les candidats voient dans les diverses questions un motif à des calculs séparés, qui deviennent, dans l'esprit de la plupart, l'objet prépondérant, au lieu de constituer un auxiliaire de la géométrie ; faute de dégager et de préciser les résultats sous leur forme géométrique, le lien entre les questions disparaît et les opérations se poursuivent sans directives et se répètent parfois inutilement ; lorsqu'il faut retrouver, sous l'expression algébrique, les éléments géométriques et formuler une relation entre eux, l'échec est général si la traduction n'est pas immédiate et s'il faut faire entrer en jeu l'observation et la réflexion au lieu d'opérer machinalement. Dans le domaine de l'algèbre même, lorsqu'il ne s'agit plus de calculer, mais de raisonner, la défaillance est à peu près unanime et un seul candidat a pu établir rigoureusement l'existence d'une limite demandée et sept autres n'ont pu que donner des indications permettant de prévoir l'existence et la valeur de la limite sans étayer leurs affirmations de preuves irréfutables. L'examen des diverses parties du problème mettra en lumière ces faiblesses.

On sait qu'il existe deux familles de quartiques planes anallagmatiques : les quartiques bicirculaires, dont l'étude est classique, et les quartiques monocirculaires (dites de Picquet) qui possèdent un point double où les tangentes (distinctes ou non) coupent la droite de l'infini aux points de la quartique autres que les points cycliques. Le problème proposé était relatif à une quartique Γ de la seconde espèce, symétrique par rapport à Ox , dont le point double se trouvait à l'origine des coordonnées, les tangentes étant les bissectrices des axes ; son équation était $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - a^2) - 2ax(x^2 + y^2) = 0$, en coordonnées cartésiennes $(\rho^2 - a^2) \cos 2\omega - 2a\rho \cos \omega = 0$, en coordonnées polaires (pôle O , axe polaire Ox).

Après avoir tracé Γ , les candidats devaient, dans une première partie, étudier la famille des cercles C invariants dans l'inversion qui conserve Γ lorsque deux des cordes communes à C et à Γ passant par O se correspondaient involutivement et lorsque le centre c décrivait une droite.

Le tracé de la courbe, qui pouvait se faire de bien des façons, en utilisant les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires, n'a été correct que dans 44 copies ; presque la moitié des candidats ne recherchent pas les asymptotes, bon nombre de ceux qui les construisent ne se préoccupent pas de leur position par rapport à la courbe et ne voient pas qu'elles la touchent à distance finie ; l'un n'est pas surpris de trouver deux asymptotes pour une direction asymptotique simple, l'autre un point d'inflexion à distance finie sur une asymptote d'une quartique. Plusieurs se bornent à quelques vagues indications sans tracé, certains même négligent délibérément la question ou annoncent qu'ils s'en occuperont plus tard.

Un cercle C coupe Γ en 6 points à distance finie, inverses deux à deux, déterminant trois cordes $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3$, communes à

C et à Γ , dont les coefficients angulaires t_1, t_2, t_3 sont les racines de l'équation.

$$(E) \quad (\alpha + \beta t)(1 - t^2) - a(1 + t^2) = 0,$$

qui dépend linéairement des coordonnées α, β du centre c de C. Lorsque deux des cordes se correspondent dans l'involution $At_1t_2 + B(t_1 + t_2) + C = 0$, le lieu de c est en général une hyperbole qui se détermine facilement, soit par son équation, soit par une représentation paramétrique en fonction de $t_3, t_1 + t_2$ ou t_1t_2 ; les directions asymptotiques sont les directions perpendiculaires aux rayons homologues des bissectrices de Ox, Oy , dans l'involution envisagée et l'hyperbole est équilatère si ces rayons, de coefficients angulaires

$-\frac{B+C}{A+B}$ et $\frac{B-C}{B-A}$ sont rectangulaires, c'est-à-dire si

$A^2 - C^2 = 0$. Pour $A = -C$, les rayons doubles de l'involution sont rectangulaires et, par conséquent, sont les axes de symétrie de deux rayons homologues quelconques; le lieu est, dans ce cas, une hyperbole équilatère dont un sommet est en O et dont le deuxième sommet décrit la droite $x = a$; ces hyperboles se déduisent de $x^2 - y^2 - ax = 0$ par la similitude résultant d'une rotation de centre

O et d'angle θ et de l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{\cos \theta}$;

les homologues d'un même point sont alignés. Pour $A = C$, le lieu du centre c devient une droite, ainsi qu'il découle du rapprochement de la relation $A(t_1t_2 + 1) + B(t_1 + t_2) = 0$ et de la relation $t_1t_2 + 1 + t_3(t_1 + t_2) = 0$ qui lie les racines de (E); on obtient en effet $(t_1 + t_2)(-At_3 + B) = 0$, qui conduit à $t_1 + t_2 = 0$, symétrie par rapport à Ox , pour laquelle les cercles C, centrés sur Ox , passent par les deux points fixes de Γ , $x = 0, y = \pm a, (t_3 = \infty)$,

ou à $t_3 = \frac{B}{A}$, auquel cas les cercles C passent encore par deux

points fixes M_3, M'_3 de Γ et ont leurs centres sur la médiatrice de $M_3M'_3$. On s'assure que ce cas et celui de l'involution décomposée sont les seuls où c décrit une droite d qui est, par conséquent, médiatrice d'une corde MM' et dont l'équation n'est autre que (E) si l'on considère α, β comme coordonnées courantes; l'enveloppe de d est la déférente relative à l'anallagmatique Γ .

Presque tous les candidats forment correctement, parfois péniblement, l'équation (E); mais l'hyperbole n'est définie exactement que dans 55 copies; 31 en donnent l'équation, souvent sans simplification, et 24 une représentation paramétrique. La plupart de ces copies donnent exactement la condition pour que l'hyperbole soit équilatère, mais dix seulement indiquent que l'involution devient une symétrie; les autres ne se soucient pas de préciser l'involution, à moins qu'ils n'affirment que l'angle de deux rayons homologues est constant; plus rares encore sont ceux qui précisent la position des droites d par rapport à Γ .

Lorsque c décrit une droite quelconque D , les coefficients angulaires de deux des cordes $M_1M'_1$, $M_2M'_2$ sont liés par une relation biquadratique involutive ; ces cordes déterminent, par suite, sur une conique passant par O , en particulier sur le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, des cordes m_1m_2 dont l'enveloppe est de deuxième classe ; si l'enveloppe est décomposée en points, on retombe sur le cas des involutions relatives aux droites d .

54 candidats abordent ces questions ; aucun n'en donne la solution complète ; un seul précise bien le cas de décomposition de l'enveloppe et le retour aux droites d , un seul étudie exactement le cas où l'enveloppe est un cercle. Des affirmations comme celles-ci : « $F(u, v, w) = 0$, du second degré, définit un cercle si $F(u, v, 0) = \lambda(u^2 + v^2)$ », « les directions asymptotiques de $F(u, v, w) = 0$ sont données par $F(u, v, 0) = 0$ », « un cercle a une équation tangentielle de la forme $u^2 + v^2 - \varphi(w) = 0$ » donnent à penser, lorsqu'on les retrouve dans plusieurs copies, à côté de passages de bonne qualité, que l'application aux coordonnées tangentielles des raisonnements utilisés couramment en coordonnées ponctuelles est au-dessus des forces des candidats dont aucun n'ignore l'équation tangentielle d'un cercle. Le manque de sûreté des connaissances devrait inciter à un raisonnement direct au lieu d'un appel à la mémoire qui, plus défailante encore un jour d'examen que de coutume, fait dire par exemple qu'« il n'existe de triangle inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre que si les deux cercles ont même centre et des rayons de rapport égal à 2 ».

Les notes obtenues pour cette première partie reflètent déjà le classement définitif : un 14 1/2, un 14, quatre 13 1/2, deux 12 1/2, cinq 12, deux 11 1/2, deux 10 1/2, quatre 10, puis vingt-et-une supérieures à 8, trente-et-une de 8 à 5, trente-trois entre 5 et 2, seize inférieures à 2 ; la moyenne est de 6,3.

La deuxième partie du problème consistait en la détermination des cercles C' bitangents à Γ et l'étude de la suite des cercles obtenus en déduisant d'un cercle C_n le cercle C_{n+1} touchant Γ aux deux points, différents des points de contact, où C_n coupe Γ .

Le lieu des centres c' des cercles C' n'était autre que l'enveloppe des droites d déjà déterminées dans la première partie ; aucun calcul nouveau n'était donc nécessaire pour écrire l'équation des cercles C' . La relation entre les coefficients angulaires t, t_1 de la corde de contact MM' et de la corde des points d'intersection $M_1M'_1$, $t_1 = -\frac{t^2 + 1}{2t}$, rame-

nait la limite des cercles C_n à celle de la suite $t_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(t_n + \frac{1}{t_n}\right)$; si l'on porte sur un axe Ot , les segments OT_n de mesure t_n , T_{n+1} est le symétrique, par rapport à O , du milieu T'_{n+1} de T_nS_n , S_n étant l'inverse de T_n par rapport au cercle de centre O et de rayon 1 ; ceci permet d'établir simplement et en toute rigueur que la limite de $|t_n|$ est 1 et que t_{2n} et t_{2n+1} ont des limites respectives ε et $-\varepsilon$ (ε étant

égal à $+1$ ou -1 suivant le cas) et que les cercles C'_{2n} , C'_{2n+1} ont pour limites les droites tangentes en O à Γ ; en mettant la relation entre t, t_1 sous la forme $\operatorname{tg}\left(\omega_1 + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}^2\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$, on arrivait également très vite au résultat.

Cinq candidats ont vu qu'ils avaient déjà déterminé dans la première partie le lieu de c' ; dix-huit ont examiné la limite des cercles C'_n mais, si trois ont indiqué exactement les limites, sans preuves suffisantes, le seul qui ait établi rigoureusement que t_{2n} et t_{2n+1} tendaient vers $+1$ ou -1 en a conclu que C'_{2n} et C'_{2n+1} tendaient vers les cercles osculateurs en O à Γ . Un 16, un 13 $1/2$, un 12 $1/2$, un 12, trois 11 $1/2$, un 11, un 10, deux 9 $1/2$ récompensent les meilleures copies; la moyenne tombe à 3,7.

L'étude des cercles C' se poursuivait dans la troisième partie. Les trois cercles bitangents à Γ , aux extrémités des cordes communes avec un cercle C , coupent Γ en six autres points sur un cercle C_1 ; la transformation $t^2 + 2tt' + 1 = 0$ transforme, en effet, l'équation (E) en une équation de même forme où les coefficients α, β , sont remplacés par $\alpha' = a - 2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a}$, $\beta' = \frac{4\beta(\alpha - a)}{a}$. La puissance d'un point (ρ, ω) par rapport à C est $P = \rho^2 - a^2 - 2\rho(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)$; pour un point M de Γ , elle s'écrit

$$P = \frac{2\rho}{\cos 2\omega} [a \cos \omega - (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega) \cos 2\omega] = \frac{2\rho \cos^3 \omega}{\cos 2\omega} \beta(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$

pour les trois cercles bitangents, on a trois puissance de la forme

$$\pi_i = \frac{2\rho \cos^3 \omega}{\cos 2\omega} (t-t_i)^2 (t-t'_i); \quad \text{le produit } \pi_1 \pi_2 \pi_3 \text{ est égal à}$$

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 \left[\frac{2\rho \cos^3 \omega}{\cos 2\omega} (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) \right]^3 \\ \left[\frac{2\rho \cos^3 \omega}{\cos 2\omega} (t-t'_1)(t-t'_2)(t-t'_3) \right] = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\beta^3 \beta'} P^2 P_1,$$

P_1 étant la puissance de M par rapport à C_1 ; le calcul de $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ conduit à l'égalité $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = \beta^2 \beta'$ et l'on vérifie ainsi, comme le demandait l'énoncé, l'égalité $\pi_1 \pi_2 \pi_3 = P^2 P_1$.

Le lieu de c' , enveloppe des médiatrices des cordes MM' est une courbe Γ' de 3^e classe, bitangente à la droite de l'infini aux points à l'infini de Γ ; c'est donc une transformée homographique de l'hypocycloïde à 3 rebroussements. Les centres des cercles bitangents à Γ , menés par MM' , sont les points d'intersection I_1, I_2 , autres que le point de contact de la médiatrice de MM' avec Γ' ; dans le cas de l'hypocycloïde à 3 rebroussements, la longueur $I_1 I_2$ serait constante, la propriété correspondante pour Γ' est la constance du produit des projections de $I_1 I_2$ sur deux axes passant par les points à l'infini de Γ' ; un calcul facile permet de vérifier la propriété. La valeur des puissances, déjà utilisée, permet d'établir la relation demandée entre les tangente mT_1, mT_2 menées aux cercles de centres I_1, I_2 par un point

m de Γ et les distances d_1, d_2 aux cordes de contact ; ces cordes ont des coefficients angulaires liés par la relation $t_1 t_2 = 1$, relation involutive pour laquelle le lieu du centre du cercle passant par les extrémités des cordes est l'une des hyperboles équilatères déterminées dans la première partie.

31 candidats ont attaqué cette troisième partie, aucun n'a obtenu les relations demandées entre les puissances, nulle trace d'essai d'une méthode pour établir les relations ne se rencontre. Les meilleurs ont montré que les trois couples de points tels que $M_1 M'_1$ sont sur un même cercle, vérifié la propriété relative aux segments $I_1 I_2$, déterminé le lieu du centre du cercle considéré à la fin, sans voir que ce lieu était déjà obtenu. Aussi, les plus hautes notes sont-elles un $9 \frac{1}{2}$, un 9, un $7 \frac{1}{2}$, un 7, un $6 \frac{1}{2}$ et un 6 ; la moyenne s'abaisse à 0,7.

Une petite question finale relative aux cercles γ passant par O devait permettre aux candidats découragés par des essais infructueux dans la troisième partie, d'employer utilement leur activité de la dernière heure. Le cercle γ de centre ω coupe Γ en quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 et les droites OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 , font avec les bissectrices des angles formés par Ox et $O\omega$ des angles dont la somme est constante. La considération des fonctions symétriques élémentaires des racines de l'équation aux coefficients angulaires de OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 conduit rapidement à la relation

$$\begin{aligned} \Sigma \operatorname{tg}(Ox, OP_1) &= \operatorname{tg} 2(Ox, O\omega) \\ \text{ou} \quad \Sigma(Ox, OP_1) &= 2(Ox, O\omega) + k\pi, \\ \Sigma\left((Ox, OP_1) - \frac{(Ox, O\omega)}{2} - k \frac{\pi}{4}\right) &= k'\pi; \end{aligned}$$

la somme des angles formés par OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 avec les quatre droites d'angles polaires $\frac{(Ox, O\omega)}{2} + k \frac{\pi}{4}$ est toujours un multiple de π ; il en est ainsi, en particulier, pour les bissectrices des angles $(Ox, O\omega)$.

35 candidats ont étudié la question, quelques-uns ont établi correctement la propriété de l'énoncé ; aucun n'a signalé qu'elle s'appliquait à deux droites autres que les bissectrices de $(Ox, O\omega)$; les meilleures notes ont été un 18, quatre 17, trois 16, un 15, un 14, deux 10 ; la moyenne se relève à 2.

Les premières copies montrent des qualités indiscutables de clarté dans l'exposition, de netteté dans les idées, de sûreté dans le raisonnement ; mais nous aurions souhaité que la révélation de ces qualités, malgré les conditions peu favorables du concours, ne se trouvât pas à quelque moment contredite par une défaillance. »

Calcul différentiel et intégral (M. SOULA). — « 128 candidats ont remis une composition ; onze atteignent ou dépassent la note 12 ; vingt-sept ont au moins la moyenne ; cinquante-huit compositions ne dépassent pas 5.

Le résultat est donc médiocre. Le problème proposé n'offrait cependant pas de difficulté sérieuse, il ne demandait que des connaissances assez élémentaires, il ne contenait pas de question subtile, il n'était pas très long. Pour tout dire, il était nettement plus facile que ceux des années précédentes.

Une seule composition résout tout le problème ; elle vaut surtout par la sûreté avec laquelle les calculs sont conduits, bien que les méthodes ne soient pas toujours très habiles ; elle a été cotée 19. Une autre composition, qui a reçu la note 18, contient un calcul assez ingénieux pour résoudre la dernière question, mais une erreur et un raisonnement obscur se trouvent à la 6^e partie ; elle présente d'autres maladroites et l'auteur traîne, tout au long des calculs, des constantes qu'il aurait pu et dû faire disparaître. Signalons encore deux compositions notées 15,5 : l'une d'elles aborde la dernière question par une méthode qui n'est pas sans intérêt mais qui n'aboutit pas par suite d'une erreur de calcul ; l'autre se fait remarquer par un emploi assez judicieux de propriétés des fonctions analytiques.

Voici des observations qui s'appliquent à de nombreuses compositions. On doit d'abord signaler de grandes maladroites dans le choix des méthodes et dans le détail des calculs. L'énoncé demandait de ne pas garder toute une série de constantes qui s'introduisent au cours des intégrations et dont la disparition revient à imprimer une translation aux surfaces étudiées. Croira-t-on que de très nombreux candidats ne tiennent aucun compte de ce conseil qui ne leur était donné que dans leur intérêt ? Il en est même qui prennent plus de constantes que les intégrations n'en exigent ; d'autres qui choisissent des notations encombrantes, comme s'ils voulaient augmenter à plaisir la difficulté des calculs qui suivent. Certains écrivent si mal ces calculs qu'ils ne peuvent arriver au résultat exact que par un miracle qui ne se produit guère.

Les candidats connaissent en général assez bien la géométrie des surfaces. Ils oublient cependant que les rayons de courbure principaux qu'ils calculent sont affectés d'un signe suivant une convention qu'il est d'ailleurs ennuyeux de préciser au cours d'un problème. Le mieux était donc, dans ces conditions, de ne pas chercher à donner les coordonnées précises des centres de courbure principaux : des coordonnées relatives avec signes déterminés suffisent pour établir les théorèmes tels que l'énoncé les formulait. Mais si l'on prétendait donner des coordonnées exactes, il était nécessaire de montrer qu'il n'y avait pas d'erreur de signe et nul ne s'en est soucié.

Les remarques et les démonstrations géométriques sont nombreuses ; on est cependant étonné que tout le monde n'ait pas démontré géométriquement que les lignes conjuguées des lignes $z = c^{\text{te}}$ de la 4^e partie étaient les lignes $x = c^{\text{te}}$. Quelques candidats se contentent de dire : je connais déjà la question. Cette façon de rédiger n'est pas acceptable ; il est vraiment trop facile de se borner à affirmer ainsi que les questions posées sont trop simples. Dans tous les cas où la réponse

peut être donnée en termes finis, il faut écrire cette réponse sous sa forme la plus réduite.

Personne n'a compris ce que l'on demandait à la seconde question : les fonctions analytiques sont moins familières aux candidats que la géométrie des surfaces. Quelques-uns seulement ont remarqué que la fonction harmonique z était reliée simplement à la fonction analytique $\log(x + iy)$. Il aurait été facile de prévoir le résultat en remarquant qu'à la fonction demandée, $z = f(x, y)$, correspondait une surface réglée ; si deux droites de la surface n'ont pas même cote, leurs projections sur le plan xOy se coupent en un point qui ne peut être régulier pour la fonction analytique. Les droites projections ne se coupant pas en des points réguliers ne peuvent envelopper une courbe, par exemple. On doit soupçonner qu'elles passent par un point et arriver par là à la fonction $\arctg \frac{y}{x}$. Il est peut-être délicat de donner une démonstration

générale et correcte, mais l'énoncé ne l'exigeait pas.

Les candidats auraient eu intérêt à chercher toutes les fonctions analytiques d'où dérivent les fonctions harmoniques étudiées. Deux seulement ont obtenu les trajectoires orthogonales des lignes $e^u \cos x = c^te$ en se servant de la fonction analytique e^{u+ix} .

On trouve bien des erreurs et bien des insuffisances : il en est d'étonnantes. Les candidats les éviteraient s'ils s'attachaient à réfléchir sur un résultat une fois qu'il est obtenu, s'ils cherchaient des vérifications, s'ils présentaient ce résultat sous la forme la plus nette et la plus lisible, s'ils faisaient les remarques simples qui s'imposent. Bien peu de candidats ont dit que la surface de la 5^e partie admettait une symétrie et qu'il en résultait que l'équation différentielle vérifiée par z fonction de x et y , devait l'être aussi par x fonction de y et z , de sorte que le résultat de la 5^e partie est, en somme un résultat banal. La signification des problèmes doit toujours être ainsi mise en évidence : un problème d'analyse est autre chose qu'une suite de calculs ».

Mécanique rationnelle (M. BÉGHIN). — « 123 candidats ont pris part à l'épreuve de mécanique : 2 ont remis des copies blanches ; une composition ne contenant que des absurdités a été cotée zéro ; puis viennent 21 notes 0,5 et 1 ; 27 notes 1,5 et 2 ; 19 notes de 2,5 à 4 ; 24 notes de 4,5 à 6 ; 23 notes de 6,5 à 9,5 ; 6 notes seulement sont supérieures à 10 : 10,5 ; 11,5 ; 12 ; 13 ; 13 et 13,5.

Dans l'ensemble, ces compositions sont donc très faibles : leur moyenne générale est 4,05.

Le sujet proposé comportait l'étude d'un système de deux ou plusieurs sphères, soit libres, soit assujetties à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, et s'attirant proportionnellement à la distance ou suivant la loi de Newton.

On demandait avant tout au candidat de savoir ce que c'est — dynamiquement — qu'un roulement sans glissement ; on lui demandait de comprendre que c'est la « résistance au glissement » qui

s'oppose au glissement, que assujettir un corps à rouler sans glisser sur un autre, c'est supposer que le « coefficient de résistance au glissement » ou « coefficient de frottement » est assez grand pour qu'on soit sûr à l'avance que tout glissement est pratiquement impossible. Traiter un problème de roulement sans glissement, comme l'ont fait de nombreux candidats, en supposant les réactions normales, dénote une ignorance inadmissible des principes élémentaires de la dynamique.

Aucun choix d'axes de référence ou de paramètres n'était imposé par l'énoncé : il est bon qu'un futur maître sache choisir et disposer judicieusement, dans un problème, les éléments sur lesquels porteront ses raisonnements.

Les candidats avaient également le choix de la méthode : équations de la quantité de mouvement ou équations de Lagrange. Ils ont marqué une préférence accusée pour les équations de Lagrange qui présentent en effet l'avantage de limiter l'effort et donnent l'illusion que l'on peut traiter un problème de mécanique sans savoir de mécanique.

Ceux qui ont suivi cette voie ont naturellement défini la position de chaque sphère par les coordonnées de son centre et par les angles d'Euler.

Les uns, ignorants des conditions d'application des équations de Lagrange aux problèmes de roulement, ont obtenu des équations relativement simples, mais erronées, leur erreur équivalant à l'hypothèse de réactions normales ; les autres ont aligné des équations exactes, mais inextricables, que certains ont développées, combinées et recombinaées par des calculs effroyables, sans aucun espoir d'en tirer un résultat concret !

Or, pour peu que l'on ait réfléchi en traitant quelques problèmes de mécanique rationnelle, en particulier le problème classique de roulement d'une sphère homogène sur un plan horizontal, on s'aperçoit qu'il n'est pas raisonnable d'étudier le mouvement d'une sphère homogène — dont tous les rayons jouent le même rôle — au moyen des angles d'Euler qui, par nature, particularisent l'un des rayons.

Les composantes de la rotation suivant des axes ayant une position particulière par rapport aux données (pesanteur, normale au point de contact, ...) sont au contraire tout indiquées.

Les équations de Lagrange exigeant l'emploi de paramètres purement géométriques, ne sont donc pas à recommander dans ce problème ; il suffit d'ailleurs de les former pour s'apercevoir que l'on fait fausse route. Seuls, les candidats qui ont utilisé les équations de la quantité de mouvement ont obtenu des résultats.

Certains — peu nombreux — ont réalisé une mise en équation rapide en appliquant à chaque sphère roulante le théorème du moment cinétique, en prenant comme centre des moments le point de contact de la sphère avec le plan fixe. Les équations ainsi obtenues sont exactes, mais le centre des moments étant *mobile*, la méthode ne peut être admise que si le candidat montre qu'il se rend compte des raisons

exceptionnelles pour lesquelles ces équations sont exactes. Cela n'a pas été le cas.

L'élimination des forces de frottement entre les équations de mouvement conduisait immédiatement à des équations extrêmement simples, identiques à celles qu'on aurait pu écrire pour un système de points matériels s'attirant suivant la loi indiquée. Plusieurs candidats l'ont bien fait ressortir ; mais on aurait souhaité trouver, au début, une remarque préliminaire montrant, d'une manière générale, l'équivalence de toute sphère roulante à un point matériel de masse convenable mobile sans frottement sur un plan parallèle au plan donné.

Un grand nombre de compositions débutent par un calcul de la résultante des attractions auxquelles est soumise une sphère pleine ou creuse. Ce calcul n'était nullement nécessaire, la question étant classique.

Fort peu de candidats ont indiqué, sans calcul, que la résultante des attractions qu'un corps exerce sur un autre proportionnellement à la distance, est la même que lorsque la masse de chacun d'eux est concentrée en son centre de gravité ; ce n'est pourtant qu'une forme de la définition du centre de gravité.

De nombreuses compositions renferment de longs calculs d'intégrales multiples, avec changements de variables, jacobiens, etc. Dans certaines, les attractions élémentaires sont ajoutées numériquement au lieu d'être ajoutées vectoriellement !...

La première partie du problème comportait l'étude du mouvement de deux sphères S et S' roulant sur un plan horizontal fixe ; en particulier, la question suivante était posée :

La sphère S étant primitivement au repos, quel doit être le rapport des masses et comment faut-il lancer la sphère S' pour que la trajectoire de son centre soit une cycloïde usuelle ?

Cette question, si simple, a été en général assez médiocrement traitée : il ne s'agit pas de donner les valeurs de constantes arbitraires correspondant à des axes de référence non précisés, mais bien de donner la valeur numérique du rapport des masses et, sous forme concrète, la grandeur et la position que doit avoir la vitesse initiale du centre de la sphère S par rapport à la ligne des centres des deux sphères.

D'une manière générale, dans des problèmes de ce genre, les calculs n'ont de raison d'être que s'ils aboutissent à un résultat concret tombant directement sous le sens. Les valeurs que doivent avoir certaines constantes abstraites ne présentent que peu d'intérêt.

La seconde partie était relative à la détermination de l'axe instantané de rotation d'une sphère ; deux questions étaient posées à ce sujet.

La première a reçu quelques assez bonnes solutions, mais presque toutes analytiques. Or un peu de réflexion en donne une solution géométrique très simple :

Le roulement de la sphère considérée est proportionnel à la vitesse de son centre ; cette vitesse est elle-même proportionnelle à la longueur

de la normale à la cycloïde décrite, longueur limitée à la base de la cycloïde ; le pivotement de la sphère est, d'autre part, constant ; il devient alors évident que le support du vecteur-rotation de la sphère rencontre une horizontale fixe située dans le plan vertical contenant la base de la cycloïde.

La seconde question de cette seconde partie était relative à la détermination de la courbure et de la torsion de l'arête de rebroussement de la surface engendrée par l'axe de rotation de la sphère ; aucun candidat n'a recherché la torsion qui cependant résultait sans calcul de la considération des composantes bien connues de la rotation du trièdre fondamental attaché à une courbe.

Dans la troisième partie, où p sphères S roulent sur un plan horizontal, p' sphères S' se mouvant dans l'espace, les équations contiennent en évidence la somme des coordonnées de même nature des sphères de chaque groupe ; on aurait souhaité voir introduire les coordonnées des centres de gravité de ces deux groupes et trouver la remarque presque évidente que ces centres de gravité se comportent comme deux points matériels de masses convenables s'attirant suivant la loi étudiée. Cela demandait bien peu d'imagination. La plupart des candidats ont, au contraire, écrit, sous forme de déterminant d'ordre élevé, une équation caractéristique inextricable !...

La quatrième partie consistait en un problème de choc avec frottement. Quelques bonnes solutions appliquent la méthode de M. PÉRÈS ; deux candidats seulement ont déterminé correctement les conditions de fin de choc conformément aux indications de l'énoncé.

La sixième partie pouvait se traiter presque sans calcul ; il s'agissait de déterminer les conditions à remplir pour que les centres de trois sphères roulantes s'attirant suivant la loi de Newton figurent, au cours du mouvement, un triangle semblable à un triangle fixe :

Si l'on remarque que les centres de ces trois sphères se comportent comme trois points matériels de masses convenables, on est ramené à un cas particulier connu du problème des trois corps.

Le centre de gravité G de ces trois points fictifs a un mouvement rectiligne uniforme. Le moment cinétique de ce système en son centre de gravité étant constant, il résulte immédiatement de la similitude des trois accélérations qu'elles passent toutes trois par le centre de gravité, et que les trajectoires relatives sont trois coniques semblables de foyer G ; la comparaison des forces aux accélérations montre aussitôt que les côtés du triangle formé par les trois centres doivent être proportionnels à la racine cubique des rapports qui existent entre les masses fictives et les masses réelles.

Cette question a été à peine effleurée par les candidats.

La septième partie comportait l'étude d'un mouvement stationnaire et des conditions de stabilité de ce mouvement ; quelques compositions seulement traitent le mouvement stationnaire.

En résumé, ces compositions prises dans leur ensemble montrent une préparation insuffisante de l'épreuve de mécanique. Bien entendu,

si le sujet avait comporté l'étude d'un système holonome par une application automatique des équations de Lagrange, même avec quelques difficultés d'intégration, les compositions auraient vraisemblablement été meilleures ; mais il ne s'agit pas de doubler l'épreuve d'analyse.

Il est essentiel que les candidats se préparent à un enseignement qu'ils sont appelés à donner dans les établissements d'enseignement secondaire. Une partie de la mécanique figure dans les programmes de physique ; mais le mathématicien, s'il veut bien s'intéresser à cet enseignement, peut apporter des qualités qui lui sont propres et qui ont beaucoup de valeur.

Quelques exceptions — malheureusement rares — donnent une impression plus favorable : signalons, en particulier, la meilleure des compositions, qui n'a été cotée que 13,5 parce qu'elle était incomplète ; mais sa rédaction est frappante par un sens très juste des phénomènes mécaniques, une remarquable concision, une clarté d'exposition parfaite ; il serait difficile de dire autant de choses en aussi peu de mots.

Ce sont là des qualités de premier ordre.

Épreuves orales (1).

Leçons de mathématiques élémentaires. — Les notes s'échelonnent de 1 à 17. Vingt sont au moins égales à 13 : un 17, quatre 16, quatre 15, sept 14 et quatre 13 ; onze vont de 10 à 12.

Les huit notes inférieures à la moyenne sont trois 8, un 7, deux 6, un 2 et un 1. Ces deux dernières notes s'expliquent par un défaut complet de préparation, les intéressés ayant reconnu qu'ils n'espéraient pas être admissibles. La même raison n'a pas été sans influence sur les six autres ; parfois aussi un défaut de compréhension du sujet ou une défaillance que des conditions de température particulièrement pénibles ont sans doute provoquée. Un candidat a constaté, au cours de la discussion d'une équation du second degré, que la demi-somme des racines d'un trinôme est comprise entre ces racines, ce qui pourrait à la rigueur passer pour un truisme ; mais à la grande stupéfaction du Jury, il en a tiré des conséquences relatives aux propriétés de ces racines. Il était évidemment victime d'une confusion, mais quelle note mettre pour sanctionner un cas qui relève presque de la pathologie mentale ? Celui qui a souffert d'un moment d'aberration paraît d'ailleurs de taille à se relever dans un prochain concours. En fait, un seul candidat dont la note de mathématiques élémentaires est inférieure à 10 a pu se racheter par l'ensemble des autres épreuves.

Les leçons les plus mal notées portaient sur l'arithmétique, les équations qui se ramènent au second degré et les problèmes du second degré, les déplacements dans le plan, la notion de moment et, chose assez inattendue, la résolution d'un triangle connaissant les trois côtés.

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1933 peut être demandée au Bureau (joindre 3 francs en timbres-poste).

Une critique souvent faite doit être renouvelée, à cause de son importance : lorsqu'on applique l'algèbre à un problème de géométrie, il faut, non seulement dégager, au fur et à mesure, les conditions imposées aux inconnues par la nature de la question, mais aussi insister sur la légitimité de la traduction des données par des équations ; l'existence de la figure qui a servi de base à cette traduction n'est établie qu'après une étude complète des équivalences et des réciproques.

En cosmographie, bien que les notes obtenues soient passables, il a semblé que l'octroi d'un annuaire du bureau des longitudes risquait de fausser le caractère de l'épreuve ; certains candidats pourraient être tentés de négliger la préparation des leçons portant sur cette matière, de la remplacer par une compilation de la dernière heure, où l'effort de composition n'apparaîtrait guère, et de mettre le Jury dans l'indécision. Comme d'autre part certaines données numériques sont indispensables à une exposition cohérente et qu'il convient d'éviter la surcharge de la mémoire, il paraît opportun de mettre à la disposition des intéressés, dans chaque cas particulier, une liste des nombres utiles à la construction de la leçon.

Des traces de dogmatisme se retrouvent encore, en géométrie notamment, à propos des volumes. En voici un exemple typique : un candidat étudiant le volume du tronc de pyramide triangulaire, décompose le tronc en trois tétraèdres, en s'appuyant sur le résultat qu'il suppose connu. Que n'invoque-t-il la connaissance du volume du tétraèdre pour justifier ce découpage ! Cela ne change rien à la comparaison des volumes des morceaux obtenus et le résultat apparaît sans plus d'efforts. L'exemple de l'arpenteur qui décompose ses figures polygonales en triangles et en trapèzes, pour en évaluer l'aire, ne saurait trop être recommandé.

Une leçon bien charpentée, sur les relations fondamentales qui unissent les six éléments principaux d'un triangle quelconque, a été enfin produite devant le Jury qui a manifesté sa satisfaction par l'attribution de la note 17. La présentation pourrait d'ailleurs être améliorée et la classification préalable des relations en amènerait plus naturellement la recherche ; mais la logique de l'exposition ne prêtait guère à la critique. Le progrès réalisé, à cette occasion, est vraiment sérieux et il serait désirable que l'enseignement en bénéficiât.

Dans l'ensemble, la moyenne des notes d'élémentaires des candidats admissibles approche de 12 ; celle des candidats admis n'est guère inférieure à 14.

Leçons de mathématiques spéciales. — Les notes varient de 2 à 18. Vingt-et-une sont égales ou supérieures à 13 : un 18, un 17, six 16, trois 15, six 14, quatre 13 ; neuf vont de 10 à 12.

Les huit notes inférieures à la moyenne sont un 9, deux 7, un 6, deux 4, un 3 et un 2.

A mentionner que quatre candidats ont une note inférieure à 10

pour chacune de leurs leçons ; ils ont été victimes d'un manque de préparation et, pour certains, de compréhension du sujet. Un candidat dont la note de spéciales est inférieure à la moyenne a pu se racheter par l'ensemble des autres épreuves et notamment par une leçon d'élémentaires, sur un sujet banal, où il a trouvé le moyen de faire preuve de personnalité.

Les leçons les plus mal notées portaient sur les séries à termes positifs (ignorance de la question), les courbes définies paramétriquement au moyen de leurs tangentes (même raison, impuissance à raisonner directement sur les coordonnées tangentielles), l'homographie et l'involution sur une conique (ignorance), l'intégrale définie (incompréhension partielle), le solide gén (leçon ambitieuse), les cubiques planes unicursales (ignorance et incompréhension), les trajectoires des mouvements soumis à la loi de Newton (défaut d'équilibre, des hésitations à propos de l'équivalence).

La leçon sur les cubiques unicursales a été l'occasion de rééditer une faute assez commune. Le candidat ayant trouvé la relation caractéristique de trois points t_1, t_2, t_3 alignés, dans le cas où les paramètres α, β qui correspondent au point double sont distincts, sous la forme $\varphi(t_1, t_2, t_3, \alpha) = \varphi(t_1, t_2, t_3, \beta)$, s'est cru obligé de recommencer le calcul dans le cas où $\alpha = \beta$, alors qu'il apparaît de suite que la relation correspondante est $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$.

On a vu aussi reparaître une erreur qu'on croyait enterrée sous l'amas des critiques dont elle a été l'objet de la part des professeurs de spéciales : un candidat a affirmé que deux cônes de révolution de même sommet n'ont pas plus de deux génératrices communes. S'il avait cherché à s'en rendre compte, en figurant les génératrices de contour apparent, sur le plan des axes, il aurait vu de suite qu'il peut y en avoir quatre.

Une leçon sur les transformations rationnelles, portant sur une seule racine d'une équation algébrique entière, a été présentée sobrement, avec une logique très sûre. Elle est comparable aux excellentes leçons qui classent généralement le candidat au premier rang ; elle a été cotée 18.

Une autre très bonne leçon sur les enveloppes planes, cotée 17, a permis à son auteur de passer du dernier rang des admissibles au nombre des admis ; c'est là un fait exceptionnel. On peut simplement regretter que l'exposition du sujet est fait jouer à l'élimination un rôle exagéré.

La moyenne générale des leçons de spéciales est, comme celle des leçons d'élémentaires, légèrement inférieure à 12 ; pour les candidats admis, elle est un peu supérieure à 14.

Parmi les candidats admis, on en trouve 17 qui ont une note moyenne de leçons comprise entre 13 et 16,5 ; celle des 5 autres va de 11,5 à 12,5.

Epreuves pratiques (1).

Épure (M. HENNEQUIN). — « L'épure proposée comportait d'abord la recherche de l'intersection d'une surface de révolution (Σ) engendrée par la rotation d'une parabole autour de sa directrice (verticale) Δ et d'un parabolôïde hyperbolique (Σ_1) défini par un quadrilatère gauche ABCD. L'examen de ce quadrilatère révélait que les deux plans directeurs du parabolôïde et, par suite l'axe, étaient debout, (un des plans directeurs était horizontal) ; le contour apparent horizontal du parabolôïde, immédiatement déterminé, était une parabole Π , dans le plan de bout $a'c'$, de sommet A, d'axe de bout et passant par C ; mais le plan de bout $a'c'$ est tangent à (Σ) au point C et au point G symétrique de C par rapport à A, il coupe (Σ) suivant deux paraboles d'axe de bout, dont l'une a précisément A pour sommet et passe par C et G et, par suite, n'est autre que la parabole de contour apparent du parabolôïde, qui constitue ainsi une partie de l'intersection. La droite à l'infini du plan horizontal est une droite double sur (Σ), simple sur (Σ_1) ; elle compte donc pour deux dans l'intersection. La construction d'un point courant de l'intersection, faite en coupant par un plan horizontal, conduit, en projection horizontale, à l'intersection d'un cercle ayant pour centre le foyer δ de la parabole projection de Π et passant par un point m de cette parabole, avec la tangente en m à cette parabole ; le second point d'intersection est sur l'axe de la parabole, ainsi que la géométrie élémentaire permet de le vérifier et les deux surfaces ont en commun une parabole méridienne de (Σ) dans le plan de profil de Δ .

On a ainsi un ensemble de courbes d'intersection de degré 6 ; reste une courbe de degré 2 qui ne peut provenir, d'après l'étude faite, que de la communauté d'une partie de section horizontale, et doit être, par conséquent, formée de deux droites isotropes ; les isotropes horizontales du parabolôïde ont, en effet, leurs projections horizontales passant par δ , foyer de la projection de Π et, par suite, coupent Δ ; elles appartiennent à (Σ) et complètent l'intersection du huitième degré.

La représentation demandée du solide commun au solide Σ limité par (Σ) et au solide Σ_1 en avant du parabolôïde (Σ_1), ne présentait pas de difficultés. L'ombre propre et l'ombre portée sur le plan frontal de projection, dans le cas de rayons lumineux horizontaux, à 45° sur le plan frontal, se déterminent simplement en considérant les sections horizontales du solide.

Des 39 candidats qui ont composé, 24 ont vu, guidés par les tracés effectués, que la partie utile de l'intersection était formée de deux paraboles ; mais aucun n'a donné à la fois la constitution de l'intersection complète et l'explication géométrique correcte des diverses parties. Les affirmations les plus fantaisistes se retrouvent à plusieurs exemplaires : « la droite de l'infini de $z = 0$ compte pour 4 dans l'intersection, les deux surfaces se raccordant le long de cette droite », « les

(1) Voir les énoncés page 20 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours de 1933*.

deux surfaces sont tangentes le long de la parabole de contour apparent du parabolôïde », « l'ombilicale fait partie de l'intersection et compte double. » La décomposition de la section de (Σ) par un plan bitangent est appuyée faussement, par la plupart, sur l'existence de quatre points doubles. La représentation, l'ombre propre et l'ombre portée ne sont entièrement exactes que dans trois épreuves. Beaucoup de candidats n'ont pas eu le souci de suivre, sur les sections horizontales, les points du contour d'ombre et ont, ainsi, tracé des arcs d'ombre portée inexacts.

Dans l'ensemble, les résultats apparaissent un peu supérieurs à ceux des années précédentes. Les notes sont les suivantes : un 18, deux 17, trois 16, un 15, un 14, un 13, un 12, un 11 $\frac{1}{2}$, deux 11, cinq 10, cinq 9, un 8, deux 7, deux 6, un 5, un 4, sept 3, un 2, un 1. La moyenne est de 8, 9. »

Ajoutons que celle des candidats admis est voisine de 11 et que les sept premiers ont tous, sauf un, une note d'épure égale ou supérieure à 15.

Calcul numérique. (M. SOULA). — « Le problème comportait le calcul de deux séries et la résolution d'une équation transcendante. Les résultats donnés sont en majorité exacts ; de nombreux candidats ont pensé avec raison que la méthode d'itération convenait très bien à l'équation proposée.

Mais l'évaluation des erreurs n'est pas toujours faite avec le soin désirable. Il est certain que, dans bien des cas pratiques, ces sortes d'évaluations peuvent être traitées de façon très approximatives sans grand inconvénient. Mais des agrégés de mathématiques doivent, si on le leur demande, explicitement, être en état de démontrer en toute rigueur que tel nombre est calculé avec une erreur inférieure à $\frac{1}{10^6}$ ou qu'il est donné avec six décimales exactes. Presque tous les candidats croient d'ailleurs que ces deux affirmations sont équivalentes de sorte que, s'ils ont donné des décimales exactes, pour la somme de la première série, c'est bien par hasard. Ils ne se sont même pas souciés de savoir si le résultat était obtenu par excès ou par défaut. Ceux qui avaient calculé la somme par défaut n'avaient qu'un mot à dire pour prouver l'exactitude des décimales.

On a fait grand usage des tables de logarithmes ; la discussion des erreurs commises était assez difficile et quelques-uns l'ont traitée correctement. Il aurait peut-être été plus simple de faire les multiplications dans le problème actuel. Un candidat va jusqu'à employer les logarithmes pour transformer $\frac{1}{6}$ en fraction décimale et, le plus curieux est que la table dont il disposait lui a donné six décimales exactes.

23 compositions atteignent ou dépassent la moyenne ; 5 ont une note supérieure à 15 ; 6 sont cotées au dessous de 6 ».

A ces observations du correcteur, le rapporteur doit ajouter un ren-

seignement qui les renforce. Certains candidats paraissent avoir été inquiétés par la note qui leur était attribuée. Ayant donné un résultat avec n décimales qu'ils disaient exactes — et qui pouvaient d'ailleurs l'être — ils se comparaient à des concurrents qui en avaient fourni un nombre moindre et qui avaient une note meilleure que la leur propre. L'explication en est simple : les seconds avaient justifié leurs résultats. Quant aux premiers, l'exécution des calculs auxiliaires avec une table à 5 décimales ne leur permettait pas de risquer une affirmation qui a pu faire tort à leur jugement : $n = 8$ se trouve dans ce cas.

Conclusions.

22 candidats ayant obtenu la moyenne 10, pour l'ensemble de leurs épreuves, le Jury a proposé à M. le Ministre de nommer 22 agrégés. La moyenne du premier, soit 14,5, est très honorable. Elle est comparable à celle du premier du concours précédent, elle ne peut faire oublier certains résultats plus brillants obtenus dans le passé. Le concours de 1933 se classe parmi les concours honnêtes et donnera de bons professeurs ; du point de vue qualificatif, il répond en somme aux besoins de l'enseignement secondaire.

Notons au passage que le candidat étranger a obtenu des notes suffisantes pour se ranger parmi les admis ; il ne pouvait d'ailleurs que figurer sur une liste spéciale.

Les 22 agrégés de la liste régulière se répartissent ainsi :

11 élèves de l'école normale supérieure, dont une jeune fille, 1 professeur licencié titulaire de lycée, 3 professeurs licenciés de collège ou délégués de lycée, dont un ancien élève de l'école normale supérieure, 1 professeur d'école normale, 1 auditeur de l'école normale supérieure, 3 boursiers, 1 étudiant libre, 1 répétiteur.

De ces agrégés, sept seulement ont demandé un poste immédiat ; trois ont préféré attendre en invoquant des raisons qui ont paru légitimes. Tous les autres vont être appelés au service militaire ; la plupart ont l'intention d'entrer dans l'enseignement au retour. Onze agrégés des concours antérieurs, dont dix sont au service militaire, vont occuper une chaire à la rentrée prochaine, ce qui porte à 18 le nombre de ceux qui vont entrer dans les cadres. Du point de vue numérique également, l'agrégation de mathématiques répond donc aux nécessités actuelles de l'enseignement secondaire. Un équilibre s'est établi, sur ce terrain, depuis quelques années : nul n'en peut garantir la stabilité.

Le Président du Jury,
E. BLUTEL.

Le Gérant : A. COUESLANT.
