

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1933**

Des diverses observations qu'aura pu retenir le Jury de correction, il en est une, capitale, qui s'impose immédiatement, c'est l'extrême faiblesse du concours. La chute sensible qui s'est manifestée l'an passé, après l'impression satisfaisante qu'avait donnée le concours précédent, a pris des proportions plus graves encore.

Quelles en peuvent être les causes ? Il est difficile de les dégager avec netteté d'une simple composition de Concours général ; elles sont multiples sans doute, et certaines peuvent nous échapper. C'est encore, et d'abord, la natalité déficiente des années de guerre ; le chiffre des concurrents s'abaisse de 284 à 261, alors que, précédemment, il s'élevait toujours au-dessus d'une moyenne de 400. C'est, d'autre part, une circonstance accidentelle, une circonstance atténuante dont le bénéfice a été bien volontiers accordé aux concurrents ; c'est une conception simple, classique, du volume du tétraèdre, qui est apparue à l'épreuve comme n'étant pas familière à nos élèves de Première, alors que, dans la pensée du Jury, elle devait les diriger immédiatement dans leurs recherches, et les placer au cœur du sujet (1).

Faut-il incriminer, d'autre part, un relâchement dans la culture scientifique des élèves, la tendance au moindre effort, la poursuite d'un but unique et restreint, le baccalauréat et la possibilité de l'atteindre avec une formation mathématique médiocre ? Le Jury voudrait espérer que cette dernière considération ne concerne pas l'élite, ceux au moins des élèves de Première qui participent au Concours général.

De ceux-ci, deux seulement, ceux auxquels ont été accordés des Prix, ont sauvé l'honneur, en traitant correctement, mais non complètement,

(1) Voir l'énoncé p. 5 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1933*.

les deux premières parties du sujet, en étant en outre les seuls à parler logiquement de la troisième et dernière, l'un en donnant l'essentiel, l'autre en signalant une remarque capitale. Alors que le Jury espérait voir les meilleurs se classer sur cette troisième partie, en y apportant des qualités personnelles de finesse, de perspicacité, c'est sur la seconde partie qu'il a dû se reporter pour établir un classement ; celle-ci a été non pas entièrement traitée, mais plus ou moins esquissée par dix à douze élèves ; c'est ce qui a permis de retenir les quatre compositions jugées dignes des accessits.

Suivons le travail de nos concurrents en n'y trouvant donc, hélas ! rien d'autre à signaler que des faiblesses.

Une famille de tétraèdres T est envisagée ; chacun a deux arêtes opposées, placées dans deux plans parallèles donnés P, P' . On les coupe par un même plan Q , parallèle aux précédents, et l'on demande d'abord d'établir qu'à des tétraèdres T de volumes équivalents répondent des sections Σ d'aires équivalentes. La réponse est immédiate si l'on fait appel, non pas même à la formule classique donnant le volume d'un tétraèdre en fonction de deux arêtes opposées, mais simplement à la signification de cette formule, à la relation entre ce volume et celui d'un prisme ayant pour base un triangle (ou un parallélogramme) dont deux côtés sont respectivement égaux et parallèles aux deux arêtes envisagées. La section Σ est un parallélogramme dont les côtés, parallèles aux arêtes de T placées dans les plans P, P' , sont avec elles dans des rapports constants ; l'aire de Σ est donc aussi dans un rapport constant avec l'aire du parallélogramme de côtés égaux et parallèles à ces arêtes ; d'où la conclusion et sa réciproque.

C'est ce début qui, presque pour tous, a été la pierre d'achoppement. La représentation, qui intervient ici, du volume d'un tétraèdre, n'a sans doute pas été signalée aux élèves, et c'est là leur excuse. Or, sans aller jusqu'à sa traduction en une formule numérique, formule qui était inutile, cette représentation se rencontre dans la détermination classique du volume de la pyramide triangulaire, où cette pyramide se rattache à un prisme triangulaire, puis à un parallélépipède dont les arêtes sont respectivement égales et parallèles à trois arêtes, dont deux opposées, de la pyramide. C'est au reste ce qu'ont retrouvé, inconsciemment peut-être, quelques concurrents. D'autre y ont été amenés par la considération de la section plane Σ , et son étude un peu approfondie, traitée souvent d'ailleurs dans des exercices connus.

Beaucoup se sont engagés dans d'autres voies, plus détournées, mais pouvant également aboutir. Le plan Q , que l'on supposait tacitement situé entre P et P' , décompose T en deux polyèdres, prismes triangulaires tronqués, chacun de ceux-ci pouvant à son tour être décomposé, suivant le procédé classique, soit en trois tétraèdres, soit en un tétraèdre et une pyramide quadrangulaire de base Σ . Or les diverses parties de cette décomposition et le tétraèdre T se comparent aisément ; les bases, les hauteurs, et par conséquent les volumes.

restent deux à deux dans des rapports constants. Dans ces conditions, à des tétraèdres T équivalents correspondent, dans cette décomposition, des parties équivalentes, et par suite aussi, des bases Σ d'aires équivalentes. Cette marche restait simple, naturelle ; encore exigeait-elle que l'on prenne la peine d'étudier la nature de Σ ; et certains n'ont même pas établi que c'est un parallélogramme.

Cette première partie se termine par un second paragraphe dans lequel chaque tétraèdre T , d'une famille définie par les plans parallèles P, P' , est associé à un tétraèdre T' , d'une seconde famille définie par deux plans Q, Q' , parallèles aux premiers, deux tétraèdres associés ayant deux arêtes opposées, portées par les mêmes droites. Le texte annonce qu'à des tétraèdres T , de volumes équivalents, sont associés des tétraèdres T' , de même qualité. La justification repose sur le principe déjà invoqué au premier paragraphe, les volumes étant représentés à l'aide des arêtes opposées de même support, et les longueurs de ces arêtes, dans les deux tétraèdres T, T' , étant dans un rapport constant. Sans recourir à ce principe, la question peut également être traitée en la rattachant au premier paragraphe ; si, pour passer de T à T' , on use d'un intermédiaire, en conservant le plan P , et en remplaçant P' par Q' , on fait intervenir un troisième tétraèdre T'' , et les sections Σ, Σ'' , de T, T'' par un même plan parallèle à P sont des parallélogrammes qui ont en commun deux sommets opposés ainsi que les droites portant deux côtés parallèles : les aires de Σ, Σ'' sont entre elles comme les longueurs de ces derniers côtés, et ces longueurs sont dans un rapport constant.

Ce paragraphe n'a été bien traité que par deux élèves, deux des accessits, chacune des deux méthodes ayant ainsi son représentant. Une erreur a été fréquente ; elle consistait à déclarer, sans justification aucune, que les sections Σ, Σ' , de T, T' , sont confondues.

Dans la seconde partie, les plans P, P' restant invariables, de même que deux droites D_1, D_2 , sécantes à ces plans, on envisage le complexe des droites Δ telles que les deux tétraèdres T formés l'un avec D_1 et Δ , l'autre avec D_2 et Δ , aient des volumes équivalents, et l'on propose de déterminer le lieu de ces droites Δ qui passent par un point fixe quelconque S . Les conclusions de la première partie conduisent à substituer, à l'un des plans P, P' , le plan parallèle mené par S , et c'est bien ce qu'on fait les 8 à 10 concurrents qui ont abordé cette seconde partie. Cela étant, les deux tétraèdres T, A_1B_1SM, A_2B_2SM , ont deux sommets communs S , et M , trace de Δ sur P' ; les autres sommets sont fixes ; les volumes étant équivalents, le lieu de Δ est alors celui des points dont les distances à deux plans fixes, ceux des triangles A_1B_1S, A_2B_2S , sont inversement proportionnelles aux aires de ces triangles ; il est formé de deux plans dont l'intersection est la même que celles des plans A_1B_1S, A_2B_2S , et n'est autre que la droite menée par S , s'appuyant sur D_1 et D_2 . D'une autre manière, et en s'inspirant davantage de la première partie, les sections Σ des deux tétraèdres par un même plan Q sont deux parallélogrammes ayant

chacun deux sommets fixes α_1, β_1 pour l'un, α_2, β_2 pour l'autre, et dont un troisième sommet, μ , trace de Δ sur le plan Q , est commun ; les aires de ces parallélogrammes étant équivalentes, le lieu de μ , qui définit celui de Δ , est formé de deux droites passant par l'intersection de $\alpha_1 \beta_1$ et $\alpha_2 \beta_2$.

Cette étude était relativement facile, et les rares compositions qui l'ont abordée l'ont développée avec plus ou moins de succès, plus ou moins de précision, par l'une ou l'autre des méthodes que nous venons de signaler.

La dernière partie, tout en se rattachant aux précédentes, pouvait être traitée indépendamment de la seconde. Deux triangles équilatéraux, égaux et de même sens, $ABC, A'B'C'$, sont placés dans les plans parallèles P, P' , la droite qui joint leurs centres O, O' étant perpendiculaire aux deux plans ; S est un point arbitraire de cette droite OO' ; il s'agit d'étudier, de déterminer les droites Δ , issues de S qui soit avec deux des trois droites AA', BB', CC' , soit avec toutes les trois, forment des tétraèdres T équivalents. Toute la solution découle de cette remarque initiale que les droites AA', BB', CC' se déduisent les unes des autres par rotation de 120° autour de OO' , de sorte que les bases des tétraèdres T' , substitués aux tétraèdres T , sont des triangles égaux ayant un sommet commun en S , les côtés opposés étant respectivement placés sur AA', BB', CC' ; les plans de ces bases forment un trièdre équilatéral ; les droites Δ demandées, qui sont associées à deux des droites AA', BB', CC' ont pour lieu le système des bissecteurs d'un dièdre de ce trièdre ; celles qui sont associées aux trois droites sont les quatre droites communes à ces bissecteurs, combinés trois à trois, l'une de ces quatre droites étant précisément OO' .

Coupons par un plan Q , perpendiculaire à OO' , et, pour obéir au texte, représentons ce qui se passe dans ce plan ; OO', AA', BB', CC' sont respectivement coupées en $\omega, \alpha, \beta, \gamma$ qui sont le centre et les sommets d'un triangle équilatéral ; les faces du trièdre sont coupées suivant des droites formant un second triangle équilatéral $\lambda \mu \nu$, de centre ω , circonscrit au précédent ; quand aux bissecteurs du trièdre, les uns, passant par OO' , sont perpendiculaires au plan de la figure, qu'ils coupent suivant les bissectrices intérieures du triangle $\lambda \mu \nu$, les autres, perpendiculaires respectivement aux précédents, sont coupés suivant les bissectrices extérieures de ce même triangle et forment un nouveau triangle équilatéral $\lambda' \mu' \nu'$, homothétique de $\lambda \mu \nu$, dans le rapport -2 , par rapport à ω .

Si, le plan Q restant fixe, S se déplace sur OO' , la figure se déforme, mais $\omega, \alpha, \beta, \gamma$ restent fixes, et les côtés de $\lambda' \mu' \nu'$, traces de divers lieux des droites Δ , passent respectivement par les points fixes α', β', γ' , homothétiques de α, β, γ ; les angles des triangles $\lambda \mu \nu, \lambda' \mu' \nu'$ restant constants en grandeur et sens, les sommets λ, μ, ν du premier décrivent respectivement des cercles tous égaux au cercle circonscrit à $\alpha \beta \gamma$, tous passant par ω et par deux des points α, β, γ ; λ', μ', ν' décrivent de même des cercles passant chacun par ω et deux des points α', β', γ' , et de rayon double des précédents.

Tels sont, énoncés et résolus, les problèmes successifs posés dans cette dernière partie et dont la solution pouvait apparaître rapidement, grâce à une figure bien disposée. La plupart de ces problèmes pouvaient aussi être traités par application des résultats de la seconde partie. Les maîtres qui se plaisent à ouvrir des horizons à leurs élèves pourront leur signaler, ici et là, quelques propriétés du complexe linéaire dont chacune des familles de droites Δ constitue un exemple. C'est ainsi que, lorsque S décrit une droite, le plan du complexe pivote de son côté autour d'une droite ; en particulier, $\mu'v'$, trace d'un tel plan, pivote autour du point fixe α' , lequel, en faisant varier Q , décrit dans l'espace une droite, celle qui dans l'homothétie-axiale par rapport à OO' correspond à la droite AA' décrite par α .

Dans tout cet exercice, il n'y avait rien qui pût passer pour inaccessible à des élèves de Première. Nous avons déjà dit que la connaissance de certaine qualité du volume d'un tétraèdre aurait pu les aider. Mais leur insuffisance, en la circonstance, n'est qu'une manifestation d'un défaut général, la tendance à ne connaître un phénomène que sous un seul de ses aspects, et par sa traduction en une formule numérique. Il s'agit, disons-nous, du volume du tétraèdre ; nos élèves, aussitôt, se reportent à une formule, à une seule ; ils ne la rattachent ni à ses origines, ni à sa signification ; ils oublient que le volume du tétraèdre leur est apparu comme une fraction du volume d'un prisme triangulaire ou d'un parallépipède. Ils n'examinent pas, d'autre part, si le tétraèdre soumis à leur examen ne possède pas certaines particularités, et en dépit de circonstances faites pour attirer leur attention, telles que la présence des plans parallèles P, P' , la section par un troisième plan parallèle, ils ne constatent pas que sur les six arêtes du tétraèdre il est deux couples d'arêtes opposées, appelées à jouer un rôle remarquable.

Ce qui manque aussi, c'est le support des idées générales, que les élèves ne reconnaissent pas, et dont ils ne soupçonnent pas la puissance. Pour établir qu'à des tétraèdres T de volumes équivalents correspondent des sections Σ d'aires équivalentes, il y avait à étudier un seul tétraèdre, à découvrir sur lui une relation entre son volume et l'aire de Σ ; il était lourd, inutile, d'en considérer deux, de répéter identiquement les mêmes opérations sur chacun. Même absence de généralité dans les calculs où l'on néglige les grandeurs orientées, les vecteurs. Le Jury a été unanime à constater, en le regrettant, que nos élèves n'usent pas des nombres algébriques, ou qu'ils en font un emploi défectueux, qu'ils confondent une grandeur algébrique avec sa valeur absolue, qu'ils font des calculs en se plaçant dans des hypothèses de position sans les énoncer.

Les raisonnements, dans ces conditions, sont lourds. Il en est d'incorrects ; dans diverses compositions, un raisonnement par l'absurde n'arrive pas à être logiquement construit, et c'est l'hypothèse qui est supposée inexacte.

Certaines propriétés, avons-nous dit, sont ignorées. Il y a pis, et

l'ignorance est encore moins fâcheuse que la science incomplète ou incomprise. Tel déclare qu'en coupant un tétraèdre T par un plan Q, on détache un tétraèdre semblable au premier ; il confond le plan sécant avec le plan parallèle à une face. Tel autre évalue un volume, ayant la forme d'un tronc de prisme triangulaire, en prenant pour base une face latérale, et en multipliant l'aire de cette base par la hauteur !

Le Jury s'est plaint du peu de souci apporté par les élèves dans la présentation de leurs compositions. La forme est peu soignée ; les résultats ne sont pas mis en évidence ; les figures sont confuses, avec des notations en désaccord avec celles du texte ; elles sont mal placées ; une page entière de texte se rapporte à une figure dessinée au verso de la feuille, d'où une rédaction qui a dû être pénible, et, pour le correcteur, une lecture qui l'est davantage ; les élèves devraient savoir qu'il vaut mieux des figures nombreuses, mais simples, chacune se rapportant à une partie restreinte du sujet et disposée en face du texte correspondant ou sur une feuille séparée, plutôt qu'une figure d'ensemble, aussi difficile à lire qu'à établir. À part une seule exception, qui a permis de récompenser un concurrent ayant traité seulement, mais dans un style clair, bien ordonné, la première partie du problème, la rédaction est trop souvent obscure, incohérente ; il faut plusieurs lectures successives pour arriver à comprendre ce que veut dire le concurrent.

L'orthographe est négligée, bafouée. Est-ce bien un élève de Première qui parle de l'intersection de « c'est » deux plans, ou de deux tétraèdres qui « on » des volumes équivalents, ou encore qui déclare que certain polygone « et » un parallélogramme ? Vraiment les faiblesses de ce concours ont dépassé les limites permises.

Le Président du Jury de Correction,

A. TRESSE.