
DEUXIÈME PARTIE

Sur la définition des irrationnels

La seule définition des irrationnels qui soit à la fois intuitive (mesure des longueurs), constructive, et qui réponde à la seule raison d'être des irrationnels (généralisation de l'existence des limites) est la suivante :

Toute suite monotone bornée de nombres rationnels définit un irrationnel lorsqu'elle n'a pas de limite rationnelle. Deux suites de cette nature définissent le même irrationnel lorsque la suite des différences a pour limite zéro.

Cette définition permet de démontrer en toute rigueur toutes les propriétés classiques des irrationnels : opérations, existence des points limites d'un ensemble, de la plus grande limite, etc....

La seule propriété, nécessaire pour cette théorie, dont la démonstration est délicate est la suivante :

Théorème : Etant donné une suite croissante a_n définissant le nombre λ (rationnel ou irrationnel), il existe une suite décroissante b_n définissant le même nombre.

1° *Lemme :* Soit (a_n) une suite croissante bornée supérieurement par le nombre A ; étant donné un nombre positif quelconque ε , on peut trouver un entier n tel que $a_n + p - a_n < \varepsilon$ quel que soit l'entier positif p .

Etant donné le nombre positif ε , considérons le nombre a_1 : ou bien quel que soit l'entier p positif, l'on a

$$a_p + 1 - a_1 < \varepsilon$$

et le résultat est établi ($n = 1$) ; ou bien cette condition n'est pas remplie et il existe au moins un entier $n_1 > 1$, tel que

$$a_{n_1} - a_1 \geq \varepsilon.$$

On répète le même raisonnement à partir de a_{n_1} : ou bien le résultat est établi pour $n = n_1$, ou bien il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que

$$a_{n_2} - a_{n_1} \geq \varepsilon,$$

et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait pu répéter k fois ce raisonnement ; on aura défini ainsi une succession d'entiers positifs croissants :

$$1 < n_1 < \dots < n_{k-1} < n_k$$

tels que les k premiers ne vérifient pas la condition de l'énoncé et que

$$a_{n_k} - a_{n_{k-1}} \geq \varepsilon.$$

On déduit, de l'ensemble des k inégalités vérifiées par les nombres $a_1 \dots a_{n_k}$:

$$a_{n_k} \geq a_1 + k \varepsilon$$

et, comme $a_{n_k} \leq A$ par hypothèse :

$$k \leq \frac{A - a_1}{\varepsilon}.$$

Donc le nombre des entiers $n_1, n_2, \dots$ est fini (au plus égal à $\frac{A - a_1}{\varepsilon}$).

Si l'on désigne par n_q le plus grand d'entre eux, ce nombre répond à la question, puisqu'il ne peut pas exister d'entier $n' > n_q$ tel que $a_{n'} - a_{n_q} \geq \varepsilon$.

On remarque que si n est un entier tel que $a_n + p - a_n < \varepsilon$ quel que soit l'entier p positif, *a fortiori* cette même condition est vérifiée pour tout entier $n' > n$.

2° *Démonstration* : Considérons une suite infinie décroissante de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ ayant pour limite 0 ; il est possible de lui faire correspondre une suite d'entiers positifs *croissants* $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ tels que

$$a_{n_k} + p - a_{n_k} < \varepsilon_k$$

quel que soit l'entier p positif.

Formons alors la suite

$$b_k = a_{n_k} + 2 \varepsilon_k$$

on aura ;

$$b_{k+1} - b_k = a_{n_{k+1}} - a_{n_k} + 2 \varepsilon_{k+1} - 2 \varepsilon_k < 2 \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$$

Choisissons les ε_k de façon que $\varepsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2} \varepsilon_k$, ce qui est toujours possible. La suite b_k est alors décroissante, et elle définit évidemment le même nombre λ que la suite a_{n_k} , donc que la suite a_n , ce qui démontre le théorème.

R. BRISAC,

Professeur de Navale au Lycée de Brest.
