

DEUXIÈME PARTIE

Sur le tétraèdre qui a ses quatre faces égales

Voici quelques propositions, qui sans doute ne sont pas nouvelles, sur le tétraèdre qui a ses quatre faces égales ; elles sont présentées sous forme d'énoncés de problèmes à donner aux élèves et pourront peut-être intéresser à ce titre certains de nos collègues.

I. — Soit un triangle IJK ayant ses angles aigus. On mène par les sommets des parallèles aux bases, on constitue ainsi un nouveau triangle I'J'K'. Si on rabat alors le triangle I'JK autour de JK, le triangle J'KI autour de KI, le triangle K'IJ autour de IJ, les points I', J', K' viennent buter sur la perpendiculaire au plan IJK menée par l'orthocentre du triangle I'J'K', à une même distance de ce plan. Ainsi on a construit un tétraèdre IJKL qui a toutes ses faces égales (ou deux tétraèdres symétriques qui ont cette même propriété).

II. — Quand un tétraèdre a ses faces égales, le point O, centre de gravité du solide, coïncide avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

III. — La réciproque de cette proposition est vraie.

IV. — Le point O est le sommet de quatre tétraèdres qui ont leurs arêtes égales deux à deux, c'est le centre de la sphère inscrite.

V. — Il existe trois sphères de centre O, dont chacune touche deux arêtes opposées ; si deux sphères sont confondues, les faces du tétraèdre sont isocèles ; si les trois sphères sont confondues, les faces sont équilatérales.

VI. — Soit, dans le triangle IJK, α, β, γ les mesures de JK, KI, IJ. Dans le trièdre L, soit a, b, c les mesures des angles-faces opposés à JK, KI, IJ ; soit aussi A, B, C les mesures des angles dièdres correspondants. Soit enfin s la mesure de la surface du triangle IJK. On a dans ce trièdre :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

d'où, en remplaçant $\cos a$ par $-\cos(b+c)$,

$$\sin b \sin c (1 - \cos A) = 2 \cos b \cos c$$

A est alors déterminé par la relation

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \cotg b \cotg c,$$

qui entraîne celle-ci :

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cotg c \cotg b \cotg c$$

VII. — Soit ω le pied de la hauteur issue de L , on a :
aire $J\omega K = s \cos A$, aire $K\omega I = s \cos B$, aire $I\omega J = s \cos C$,
et par suite $\cos A + \cos B + \cos C = 1$.

VIII. — On détermine une hauteur h du tétraèdre en employant un triangle rectangle dont l'hypoténuse est une des hauteurs l d'une face. On a par exemple :

$$h = l \sin A = \frac{2s}{x} \sin A$$

Si on compare les trois expressions qu'on trouve ainsi pour h on voit que :

$$\frac{\sin A}{x} = \frac{\sin B}{\beta} = \frac{\sin C}{\gamma},$$

résultat qui découle d'ailleurs de la comparaison entre la relation des sinus en trigonométrie rectiligne et la relation des sinus en trigonométrie sphérique.

G. MAUPIN,

Professeur honoraire au Lycée de Bordeaux.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT (personnel intéressé). — 46.729