

DEUXIÈME PARTIE

Sur la formule de Taylor

On démontre généralement la formule de Taylor-Lagrange (1) pour une fonction $f(x)$ dans un intervalle $(a, a + h)$:

$$(T.L.) \left\{ \begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h) \\ 0 &< \theta < 1 \end{aligned} \right.$$

comme une généralisation de la formule classique des accroissements finis

$$\left\{ \begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= hf'(a + \omega h) \\ 0 &< \omega < 1 \end{aligned} \right.$$

Or, celle-ci suppose, non seulement pour sa démonstration, mais même pour qu'elle ait un sens, que $f'(a + \omega h)$ existe, sachant seulement que $0 < \omega < 1$, c'est-à-dire suppose que $f(x)$ soit dérivable pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(a, a + h)$; mais on a aussi la formule

$$\left\{ \begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= h[f'(a) + \varepsilon_1] \\ \varepsilon_1 &\text{ tendant vers zéro quand } h \text{ tend vers zéro.} \end{aligned} \right.$$

qui suppose seulement que $f(x)$ est dérivable pour $x = a$.

Il est naturel d'essayer de généraliser aussi cette dernière formule. Il s'agira d'obtenir une formule assez analogue à la formule de Taylor-Lagrange où $f^{(n)}(a + \theta h)$ sera remplacé par $[f^{(n)}(a) + \varepsilon]$, ε tendant vers zéro avec h , et qui sera valable sous la seule supposition qu'elle ait un sens, c'est-à-dire que $f^{(n)}(a)$ existe — ce qui entraîne, bien entendu, qu'au voisinage de $x = a$ la fonction $f(x)$ est continue et dérivable $(n-1)$ fois.

Il se trouve qu'une telle généralisation est possible, comme l'a montré

(1) La forme du dernier terme ou « reste » de cette formule est due à LAGRANGE.

pour la première fois, à ma connaissance, M. W.-H. YOUNG, dans un petit opuscule intitulé : « The fundamental theorems of Differential Calculus ». J'appellerai donc la formule obtenue *la formule de Taylor-Young*. La même proposition se trouve établie dans les dernières éditions du Cours d'Analyse infinitésimale de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN (p. 108 de la 3^e édition du Tome I).

On pourrait se demander : 1^o si la formule du reste de Young peut rendre en mathématiques spéciales des services appréciables et autres que ceux que fournit la formule du reste de Lagrange ; 2^o si, dans ce cas, l'effort supplémentaire nécessité par la démonstration de la formule de Young n'est pas hors de proportion avec son utilité.

1^o En ce qui concerne le premier point, l'expression du reste de Young évitera dans beaucoup de cas d'avoir à formuler des réserves sans véritable nécessité. Par exemple, pour que l'équation du plan osculateur en un point M d'une courbe ait un sens il suffit que les dérivées secondes x'', y'', z'' des coordonnées d'un point de la courbe, variable avec t , existent *au point M*. Pour que cette équation représente un plan, il faut de plus que $x'y'' - y'x'', \dots, z'x'' - x'z''$ ne soient pas nuls à la fois, *au point M*. La démonstration usuelle exige, en outre, que x'', y'', z'' existent et soient continues au voisinage de M. En substituant dans cette démonstration la formule de Taylor-Young à la formule de Taylor-Lagrange, on obtient une démonstration exactement aussi simple, mais valable dans le cas le plus général où l'équation obtenue a un sens et représente effectivement un plan. En outre, on débarrasse ainsi l'esprit de l'élève de la préoccupation de formuler des réserves qui deviennent parfaitement inutiles. Il n'y aurait lieu de les maintenir que si elles correspondaient à une simplification de la démonstration, ce qui n'est nullement le cas.

De même, grâce à la formule de Taylor-Young, on simplifie aussi l'exposé des développements limités. On dira qu'une fonction $\varphi(x)$, dont on ne sait rien concernant la valeur ou même l'existence des dérivées, — a, à l'origine, par exemple, un développement limité, dont « la partie entière » est d'ordre n s'il existe un polynôme de degré au plus n , $P_n(x)$ qui ne diffère de $\varphi(x)$ que par un infiniment petit d'ordre supérieur à n , lorsque x est considéré comme infiniment petit principal.

La formule de Taylor-Young montre que toute fonction dérivable à l'origine jusqu'à l'ordre n possède à l'origine un développement limité d'ordre n . (Cette condition suffisante n'est d'ailleurs pas nécessaire). Pour employer la formule de Mac-Laurin-Lagrange, on serait amené à supposer inutilement pour le même objet que cette dérivée n^{e} existe au voisinage de l'origine et est continue à l'origine. Ce sont des hypothèses qui ne seront pas en évidence dans l'écriture, que l'élève risque d'oublier et qui ne font que compliquer sa tâche.

On pourrait en donner encore bien d'autres exemples.

2^o La démonstration de la formule de Taylor-Young est tout à fait analogue à celle de la formule de Taylor-Lagrange et, surtout, *peut être établie du même coup*.

C'est ce que l'on voit dans les exposés cités plus haut. Pour éviter à mes collègues des recherches bibliographiques, j'indique ici comment je présente cette démonstration, en substance, la même que celle des auteurs déjà cités, dans mon cours à l'Ecole Normale Supérieure de St-Cloud.

On a établi d'abord, dans le cours d'algèbre, la forme commune et qui a son intérêt propre, que prennent pour un polynôme $P(x)$ de degré n les formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young :

$$P(a+h) - P(a) - hP'(a) - \dots - \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(a) = 0.$$

Ainsi l'expression

$$A = f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

se réduit à la forme $\frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \dots \right]$, lorsque f est un polynôme de degré quelconque.

Lorsque $f(x)$ est une fonction telle que l'expression A ait un sens, il est naturel de représenter l'expression A sous la forme $h^n M(h)$, et de se demander si l'on peut, sous certaines conditions, exprimer $M(h)$ par l'intermédiaire de $f^{(n)}(x)$.

Supposons donc que $f(x)$ soit une fonction ayant une dérivée d'ordre $n-1$ dans l'intervalle $(a, a+h)$ et formons la fonction

$$\varphi(t) = f(a+t) - f(a) - tf'(a) - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - t^n M(h).$$

Cette fonction de t est définie dans l'intervalle $(0, h)$ et admet des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$, dont le calcul est immédiat. La dérivée d'ordre $n-1$ est :

$$\varphi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(a+t) - f^{(n-1)}(a) - n! M(h) \cdot t$$

Nous voyons alors que : 1° $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, et d'après le théorème de Rolle, il existe au moins un nombre h_1 , intérieur à $(0, h)$ tel que

$$\varphi'(h_1) = 0$$

2° $\varphi(0) = \varphi'(h_1) = 0$; il existe donc un nombre h_2 , intérieur à $(0, h_1)$, donc à $(0, h)$, tel que :

$$\varphi''(h_2) = 0, \text{ etc...}$$

enfin, il existe un nombre h_{n-1} intérieur à $(0, h)$ tel que :

$$\varphi^{(n-1)}(h_{n-1}) = 0,$$

$$\text{et, par suite : } (1) \quad M(h) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n-1)}(a+h_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{h_{n-1}}$$

puisque h_{n-1} n'est pas nul.

Il ne nous reste plus qu'à simplifier cette expression en appliquant à la fonction $f^{(n-1)}(x)$, dans l'intervalle $(a, a+h_{n-1})$ soit la formule de définition de sa dérivée pour $x=a$, soit la formule des accroissements finis.

Nous aurons alors deux hypothèses successives à examiner :

1° Supposons uniquement l'existence de $f^{(n)}(a)$. Alors, on a :

$$\frac{f^{(n-1)}(a+t) - f^{(n-1)}(a)}{t} = f^{(n)}(a) + \alpha(t),$$

$\alpha(t)$ tendant vers zéro avec t ,

et

$$M(h) = \frac{1}{n!} [f^{(n)}(a) + \alpha(h_{n-1})].$$

La formule montre du reste que $\frac{1}{n!} \alpha(h_{n-1})$ est une certaine fonction de h , $\varepsilon(h)$. Lorsque h tend vers zéro, h_{n-1} aussi ; donc $\alpha(h_{n-1})$ et $\varepsilon(h)$ tendent aussi vers zéro.

On obtient ainsi la formule de Taylor-Young :

$$(T.Y.) \left\{ \begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + h^n \cdot \varepsilon(h) \\ \text{où } \varepsilon(h) &\text{ tend vers zéro en même temps que } h. \end{aligned} \right.$$

Cette formule est établie sous les hypothèses que $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ dans l'intervalle $(a, a+h)$ et une dérivée d'ordre n au point $x=a$.

Remarquons que l'existence de la dérivée d'ordre n au point $x=a$ implique l'existence de la dérivée d'ordre $(n-1)$ dans un intervalle de la forme $(a, a+\eta)$. On peut donc énoncer :

Etant donnée une fonction $f(x)$, assujettie à la seule condition d'admettre une dérivée d'ordre n au point $x=a$, on peut toujours trouver un nombre η tel que, pour toute valeur de h comprise entre 0 et η , la formule de Taylor-Young (T.-Y.) soit applicable à la fonction $f(x)$.

2° Renonçons à l'hypothèse précédente, et, pour appliquer à $f^{(n-1)}(x)$ la formule des accroissements finis, supposons que $f^n(x)$ existe à l'intérieur de $(a, a+h)$.

Alors la formule (1) se réduit à :

$$M(h) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + h_n)$$

où h_n est un certain nombre intérieur à $(0, h_{n-1})$, et par suite intérieur à l'intervalle $(0, h)$.

On peut du reste poser $h_n = \theta h$ où θ est intérieur à l'intervalle $(0, 1)$, et on retrouve ainsi la formule classique (T.-L.) de Taylor-Lagrange.

On peut résumer ainsi ce qui a été démontré pour chacune des formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange :

Il suffit qu'elle ait un sens pour qu'elle soit exacte.

M. FRÉCHET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.