

VI. Documents officiels

6. Rapport sur le Concours, en 1932 de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)

Epreuves écrites (2).

Le nombre des candidats inscrits a augmenté sensiblement : 122 au lieu de 104.

Celui des concurrents a suivi la même progression : 107 après 95. Cette augmentation a porté sur les étudiants à divers titres, 33 après 24, et sur ceux qui exercent des fonctions de surveillance, 25 après 16.

Le nombre des normaliens a légèrement fléchi, celui des professeurs titulaires ou délégués n'a guère varié.

Deux femmes ont encore participé aux épreuves écrites, ainsi que deux étudiants appelés au service militaire.

20 places ayant été mises au concours, le Jury a cru devoir proclamer 36 admissibles avec l'espoir que peu d'anciens échapperaient à son choix. Cet espoir s'est presque réalisé puisque quatre seulement ont été évincés : encore deux se sont-ils classés au 37^e rang, un au 41^e et un au 62^e.

(1) Le Jury était composé de MM. BLUTEL, inspecteur général, président ; TRESSE, inspecteur général, vice-président ; PÈRES, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille ; SOULA, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier ; HENNEQUIN, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Buffon.

(2) Voir les énoncés pages 15 et suivantes des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1932*.

Ces résultats ne sont pas sans inspirer confiance dans la continuité du jugement des Jurys successifs.

Ce développement de la liste des admissibles donne une garantie sérieuse pour la constitution de celle des admis ; ce n'est pas le seul avantage qu'on puisse y trouver. Le nombre des candidats à un poste de mathématiques augmente sans cesse et dépasse de beaucoup les besoins actuels. Le choix en est facilité par la sécurité que donnent les résultats obtenus aux épreuves écrites du concours d'agrégation ; on y trouve tout au moins un indice de la valeur scientifique relative des postulants.

La moyenne 13 du premier admissible correspond à celle du troisième de 1931. En revanche celle du 36^e est supérieure d'un demi-point à celle du candidat de même rang, l'an dernier. Il s'agit donc d'un concours moyen. Cette impression se dégagera, assombrie peut-être, à la lecture des rapports particuliers, relatifs à chaque composition.

Parmi les admissibles, on trouve les huit normaliens qui se sont présentés, 1 ancien normalien et 1 auditeur de l'école normale supérieure, dix étudiants boursiers ou libres, douze professeurs à des titres divers, trois répétiteurs et un militaire.

Mathématiques élémentaires (M. TRESSE). — « La composition de géométrie a donné, dans l'ensemble, des résultats assez faibles. 107 candidats y ont pris part ; 17 seulement ont obtenu la moyenne avec des notes s'échelonnant à peu près régulièrement, par demi-points, de 15 à 10, sauf deux groupements de quatre unités aux échelons de 13,5 et 10 ; ensuite, 18 copies ont été cotées de 9,5 à 7,5 inclusivement, 25 de 7 à 5, 29 de 4,5 à 2,5 et 18 de 2 à 0. Il faut descendre jusqu'aux notes 8 ou 6 pour réunir sensiblement le premier quart ou la première moitié du contingent.

La faiblesse de l'épreuve a de quoi surprendre, si l'on considère que le sujet proposé consistait en une étude, par les procédés de la géométrie élémentaire, de l'hyperboloïde à une nappe et que cette étude ne comportait aucun résultat qui fût nouveau pour les candidats, d'après les connaissances de géométrie analytique qui leur sont imposées.

Cette étude élémentaire repose sur la notion de *distance oblique*, parallèle à un plan P , d'un point à une droite, entendant par là la longueur du segment parallèle à P limité au point et à la droite. L'hyperboloïde est défini comme la surface Σ , lieu des points M dont la distance à un point fixe F (foyer) est dans un rapport constant e , supérieur à 1 (excentricité), avec la distance oblique à une droite Δ (directrice), non perpendiculaire à P .

Cette définition met de suite en évidence les deux séries de sections circulaires de Σ , avec leurs diamètres conjugués ; leurs plans sont parallèles soit à P , soit au plan P' symétrique de P par rapport à Δ , et chacune d'elles se trouve sur la sphère, lieu des points dont les distances à F et au point d'intersection du plan sécant avec Δ sont dans un rapport égal à e . Le diamètre conjugué de chaque série apparaît ensuite comme décrit par le point qui partage dans un rapport constant un segment de droite parallèle à P ou P' , dont les extrémités décrivent Δ et la perpendiculaire abaissée de F sur P ou P' .

On arrive à la détermination de l'intersection de Σ avec une sécante quelconque et, en particulier, aux génératrices rectilignes de Σ , en suivant d'abord la variation de la distance oblique à Δ d'un point N , mobile sur une droite quelconque D . Si l'on projette parallèlement à Δ , sur un plan parallèle à P , la distance oblique est égale à sa projection gn , laquelle est la distance d'un point fixe g , projection de Δ , à un point variable n qui, projection de N , décrit une droite d , projection de D ; elle passe par un minimum pour une position particulière N_0, n_0 , de N et n ; puis, comme N et n décrivent sur D et d des divisions semblables, la distance oblique, représentée en gn , reste proportionnelle à la distance GN de N à un point fixe G , lequel correspond, dans un plan quelconque mené par D , à g , dans la similitude qui fait correspondre D à d ; le plan choisi, mené par D , étant arbitraire, il y a une infinité de points G , situés sur un cercle d'axe D et de centre N_0 : il n'y a qu'un seul, point de rencontre de D et Δ , dans le cas où ces droites sont sécantes. Si, faisant varier D , on impose au rapport de similitude d'être égal à e , les directions des droites D sont celles des génératrices d'un cône à sections circulaires parallèles à P et P' , cône qui peut être défini comme une surface Σ , dont le foyer serait sur la directrice ; ce cône est celui des directions asymptotiques de Σ . Si en outre, on impose au cercle des points G de passer par F , la droite D est entièrement située sur Σ : or, en se fixant la génératrice du cône parallèle à cette droite, la présence de F impose à N_0 et au cercle des points G d'être dans le plan perpendiculaire à cette génératrice mené par F ; la présence de Δ détermine un second plan contenant n_0 et N_0 , plan mené par Δ et coupant P suivant une perpendiculaire à la projection de la génératrice ; N_0 doit ainsi se déplacer sur une certaine droite ; le cercle des G varie en même temps en restant homothétique à lui-même par rapport à un point, placé sur Δ , qui lui est intérieur, de sorte que, dans deux de ses positions, il passe par F , et que toute génératrice du cône est parallèle à deux génératrices de Σ .

Les sections φ de Σ par des plans menés par Δ s'étudient facilement. Pour tout point M situé dans un tel plan Q , la distance oblique à Δ reste parallèle à une direction fixe et proportionnelle soit à la distance proprement dite de M à Δ ou au plan Q_1 passant par Δ et perpendiculaire à Q , soit à tout plan Q' passant par Δ et distinct de Q : les points de la section φ ont donc des distances à F , à Q_1 , à Q' , qui restent dans des rapports constants ; ils sont ainsi sur une infinité de quadriques de révolution Φ , lieu de points dont les distances à F et à un plan directeur Q' sont dans un rapport constant ; en particulier, lorsqu'on fait passer Q' par F , Φ est un cône de révolution de sommet F ; φ est donc une conique. De plus, lorsque Q' se confond avec Q_1 , le rapport constant est supérieur à l'unité, Φ est un hyperboloïde de révolution à deux nappes et φ , sa section par un plan parallèle à son axe, est toujours une hyperbole.

Diverses symétries de Σ apparaissent au cours de ces recherches. Et d'abord le plan Ω mené par F perpendiculairement à Δ est un plan de symétrie, toute sécante parallèle à Δ coupant Σ en deux points équidistants de F . Les sections circulaires Γ en font apparaître un second, le plan

qui coupe en deux parties égales les cordes de ces cercles perpendiculaires à Δ ; ce plan contient la droite t , lieu des centres des cercles Γ ; il est parallèle à Δ , perpendiculaire à P et à Ω . Ces cercles Γ font aussi apparaître un centre de symétrie O , placé sur t , car les rayons de ces cercles, qui varient comme la distance oblique de leurs centres à une génératrice rectiligne quelconque de Σ , sont égaux pour deux positions du centre symétriques par rapport au centre O correspondant à un rayon minimum. Ce que l'on sait de Σ avec une droite quelconque montre que O est nécessairement sur l'intersection des plans de symétrie précédents, et que, en dehors d'un troisième plan de symétrie, et d'axes de symétrie, conséquences des symétries précédentes, Σ n'a pas d'autre symétrie.

La section ω de Σ par le plan de symétrie Ω joue un rôle important. Elle est le lieu des sommets des hyperboles φ . On peut la déterminer par un calcul analytique simple, qui fait appel seulement à l'expression de la distance de deux points définis par leurs coordonnées rectangulaires et qui conduit directement, en traduisant la définition de Σ , à l'équation d'une ellipse rapportée à des parallèles à ses axes. Mais il y a mieux ; le jeu des distances, droites et obliques, conduit à considérer ω comme la projection d'une courbe ω' placée dans un plan P que, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, il est commode de choisir en le faisant passer par le point δ , pied de Δ sur Ω . En passant de ω à ω' , distance à F et distance oblique à Δ d'un point de ω deviennent distance proprement dite à une droite F_2 , la parallèle à Δ , menée par F , et distance au point δ , du point correspondant de ω' ; alors ω' se place sur une surface Σ' , lieu des points dont le rapport des distances à la droite F_2 et au point δ est égal à e , ellipsoïde de révolution aplati de plan équatorial Ω ; cet ellipsoïde Σ' est à son tour la transformée par affinité à partir de Ω , d'une sphère Σ'' ayant pour grand cercle l'équateur de Σ' , ou encore lieu des points dont le rapport des distances aux points F et δ est égal à e ; finalement ω est la projection de la section de cette sphère par le plan qui correspond à P dans l'affinité : c'est une ellipse de grand axe parallèle à la trace de P sur Ω , bitangente au grand cercle équatorial de Σ' et Σ'' aux points où il coupe cette trace.

Les points F et δ occupent une position remarquable par rapport à cette ellipse ω . Revenant en effet aux hyperboles φ , toute droite du plan Ω , issue de δ , représente la trace d'un plan Q ; elle coupe ω en deux points A , A' , sommets de la section φ ; δ est donc intérieur à ω ; puis FA , FA' sont les génératrices principales du cône de révolution de sommet F qui passe par φ ; $F\delta$ est la directrice et Fx , qui lui est perpendiculaire, est l'axe focal de la conique évanouissante, formée par FA , FA' , méridienne de ce cône ; $F\delta$ et Fx sont donc les bissectrices fixes de l'angle formé par FA , FA' ; Fx est la polaire de δ par rapport à ω . Si l'on se donne arbitrairement l'ellipse ω et le point intérieur δ , F est déterminé, projection de δ sur sa polaire ; de même, si on se donne ω et le point extérieur F , δ est déterminé, intersection de la polaire de F et de la bissectrice intérieure de l'angle des tangentes issues de F . Dans les deux cas, la surface Σ est elle-même déterminée ; on connaît en effet d'abord F et Δ ; l'excentricité a pour valeur

$$e = \frac{SF}{S\delta} = \frac{S'F'}{S'\delta'} = \frac{MF}{M\delta}, \text{ } S \text{ et } S' \text{ étant les extrémités de la corde de } \omega \text{ paral-}$$

lèle au grand axe et menée par δ , M un point quelconque du cercle bitangent à ω en S et S' ; l'ellipsoïde aplati Σ' et la sphère Σ'' sont alors déterminés ainsi que les deux plans symétriques par rapport à Ω , qui coupent Σ'' suivant des cercles ayant pour projection ω , d'où enfin, par affinité, les plans P et P' ; il reste à constater, ce qui est immédiat, que la surface Σ définie avec ces éléments a bien pour section principale l'ellipse ω donnée.

Revenons aux quadriques Φ qui, dépendant d'un plan directeur mené par Δ , et d'une excentricité, tous deux variables, forment une double infinité de surfaces. On a vu que toute conique φ se place sur une simple infinité d'entre elles. Inversement, cherchons l'intersection de Σ et d'une quadrique quelconque Φ ; les points de cette intersection sont tels que leur distance au plan directeur Q de Φ soit dans un rapport constant avec leur distance oblique à Δ ; or, dans un plan P , les points possédant cette qualité sont ceux dont le rapport des distances à une droite et à un point de cette droite est constant, et, quand il en existe, leur lieu est formé de deux droites issues du point; l'intersection de Φ et Σ , si elle existe, est donc formée de deux courbes φ , placées dans deux plans Q' , Q'' passant par Δ , et, dans un cas limite, de deux courbes confondues. Dans ce cas limite, Φ est alors une quadrique particulière Φ_0 , inscrite ou circonscrite à Σ , le long d'une hyperbole φ_0 , placée dans un plan Q_0 ; ce plan Q_0 et le plan directeur Q , passant tous deux par Δ , sont tels qu'ils coupent les plans P suivant deux droites rectangulaires. Plaçons le second foyer F' ou, ce qui est équivalent, le centre C de Φ_0 , lesquels sont aussi foyer et centre de la conique méridienne bitangente à ω . Ce centre C est, d'une part, sur l'axe focal de Φ_0 , perpendiculaire abaissée de F sur le plan directeur Q , et, d'autre part, sur le diamètre conjugué, par rapport à ω , de la corde des contacts trace de Q_0 . Or ces diverses droites, diamètre, corde des contacts, trace du plan directeur, axe focal, forment toutes des faisceaux qui, de proche en proche, sont en correspondance homographique, ce qui annonce que le lieu de C est une conique passant par O , centre de ω , et par F . Dans le cas particulier où Q passe par F , Φ_0 est un cône de révolution, la corde des contacts est celle des tangentes menées de F à ω , le diamètre conjugué passe par F , et l'axe focal est la bissectrice extérieure de l'angle des tangentes; dans le cas où la corde des contacts est parallèle à un axe de ω , la trace du plan directeur lui est aussi perpendiculaire et le point C est alors la projection de F sur un axe de ω ; de ces divers éléments résulte que le lieu de F' est l'ellipse homofocale à ω qui passe par F .

Cette conclusion amenait ainsi à l'une des focales de l'hyperboloïde Σ . L'étude pourrait être poussée encore plus loin; elle conduirait à diverses propriétés de la focale, et, principalement, elle établirait qu'une même surface Σ peut être définie, comme il a été dit, d'une infinité de manières, chaque point de la focale jouant le rôle de foyer. Mais, limitée à la conclusion précédente, la recherche est apparue comme étant déjà trop copieuse pour les concurrents dont aucun n'a pu aborder la dernière partie. Tous

les autres points du problème ont été traités, et, à part l'étude complète des symétries, et la recherche de ω , déterminée comme projection d'un cercle, il n'est pas, dans l'exposé que nous venons de présenter, de point qui n'ait été établi, de la manière que nous avons indiquée, par l'un au moins des candidats. Les quelques compositions qui ont été favorablement appréciées sont celles où l'une au moins des questions a été présentée avec la vision complète de toutes les circonstances dont elle se compose ; telles sont la recherche de droites placées sur la surface, la détermination de ω comme section plane d'un ellipsoïde aplati, la nature hyperbolique de toutes les sections φ .

Il est curieux d'observer que les parties les plus élémentaires ne sont pas celles qui ont eu le plus de succès, et l'étude des sections φ et des quadriques Φ a mieux inspiré les concurrents que la recherche du lieu des centres des sections circulaires.

Mais la remarque capitale, qui se dégage de la lecture des compositions, porte avant tout sur le manque de précision qui se constate à peu près partout, dans le langage comme dans la présentation des idées, dans le raisonnement comme dans la vue des faits, celle-ci ne cherchant à être ni exacte, ni complète. Ce défaut apparaît dans le langage : un plan est fort souvent défini comme étant perpendiculaire à un autre, une droite OA de l'espace comme étant perpendiculaire à une autre $O\delta$, un point O comme étant situé sur la droite OC , un autre G , comme placé sur une sphère de centre N ; un point f est dit être obtenu en menant par F le plan parallèle à P , un plan parallèle à une droite Δ en menant par M une parallèle à Δ .

Le peu de souci de précision se retrouve dans la présentation des faits : un triangle est dit rester semblable à lui-même parce que deux de ses côtés restent dans un rapport constant, et sans ajouter que ce triangle est rectangle ; une conclusion qui doit apparaître comme la conséquence de plusieurs circonstances réunies est donnée en raison d'une seule de ces circonstances : nombreux sont ceux qui, dans un plan, constatent que trois points I, J, C , répondent à $\frac{CI}{CJ} = c^e$, et, en concluent que C décrit une droite, sans observer ni que I et J décrivent respectivement des droites, ni que l'alignement conservera une direction invariable.

L'absence de précision conduit à des incohérences : du fait que certain angle est constant, tel conclut qu'un lieu est une droite, et ajoute ensuite qu'il y en a une seconde. Elle a un défaut plus grave encore, celui de masquer la signification correcte, complète, d'un fait, et, par conséquent de paralyser le candidat dans une recherche ultérieure : la détermination du lieu des points dont la distance oblique à Δ est dans un rapport constant avec la distance à un plan Q , passant par Δ , conduit à deux plans Q', Q'' , passant également par Δ ; c'est ce qui a été donné le plus souvent ; mais une vue plus complète faisait en outre constater que l'existence de ces plans est subordonnée à une condition de possibilité, que les traces de Q' et Q'' sur un plan P sont symétriques par rapport à celle de Q , que, dans un cas limite, elles se confondent avec la perpendiculaire à celle-ci ; ne pas relever

ces observations, c'était s'interdire d'arriver aux quadriques Φ_0 circonscrites à Σ , encore moins à la correspondance entre le plan directeur de Φ_0 et le plan de la courbe de contact. Il était demandé d'étudier la variation de la distance oblique à Δ d'un point N mobile sur une droite D ; beaucoup ont répondu par un calcul, par un trinôme du second degré, sans chercher à traduire leur résultat en langage ordinaire, ce qui leur aurait montré que leur calcul était celui du troisième côté d'un triangle dont un premier côté est fixe et le second porté par une droite fixe, et, par conséquent, que ce calcul est inutile.

Les fautes contre la précision sont des plus graves, chez de futurs maîtres. Notre conclusion serait donc particulièrement décevante si, par un heureux rapprochement, les meilleures compositions, qui échappent à nos reproches, n'étaient pas en général, celles des concurrents qui, dans l'ensemble des épreuves, se sont classés dans les premiers rangs et sont arrivés au succès : nos 17 candidats, cotés ici de 15 à 10, ont été tous admissibles, et 5 seulement ont échoué à l'oral ; des 18, cotés ensuite de 9.5 à 7.5, 7 ont échoué à l'écrit et 6 à l'oral ; inversement, 4 candidats seulement, avec des notes échelonnées de 7 à 6, ont été admis, qui ne figurent pas dans les groupements précédents. »

Mathématiques spéciales (M. HENNEQUIN). — « Parmi les 105 copies de mathématiques spéciales, neuf seulement ont une note atteignant ou dépassant la moyenne : un 16, un 14, deux 11 1/2, un 11, deux 10 1/2, deux 10 ; trois autres approchent de la moyenne avec deux 9 1/2 et un 9 ; viennent ensuite un 8 1/2, un 8, trois 7 1/2, trois 7, deux 6 1/2, sept 6, six 5 1/2 ; huit 5, quatorze 4 1/2 ou 4 ; trente notes sont comprises entre 2 et 4 : douze atteignent 1, 1 1/2 ou 2 ; six copies, dont une blanche, ne dépassent pas 1/2. Mieux que leur moyenne, qui est de 4.65, l'énumération des notes montre que la composition n'a pas été réussie ; est-ce donc que le sujet présentait des difficultés inaccoutumées ou exigeait des connaissances très particulières ?

La seule notion de distance d'éléments réels ou imaginaires et les propriétés focales des coniques attachées à cette notion permettaient à tout candidat capable d'observation et de réflexion de saisir rapidement la question et de prévoir les résultats demandés ; orientés par l'examen géométrique, les calculs se faisaient tout naturellement sans exiger une virtuosité qui fait défaut à l'immense majorité. Il s'agissait d'étudier, pour une parabole donnée Π ($z = 0$, $y^2 - 2ax = 0$), les couples de droites D, Δ , dont l'une, D , est dans le plan de Π et telles que le rapport des distances à ces droites d'un point variable de Π soit constant. Ces couples généralisent celui qui est formé par la directrice de Π et la perpendiculaire à son plan menée par son foyer. L'écriture de la seule relation $d^2 - e^2\delta^2 = 0$ pour tout point de la parabole Π , montre que Π appartient au faisceau ponctuel de coniques défini par la droite double $D(d^2 = 0)$ et par les deux traces, sur le plan de Π , des plans isotropes formant le cylindre de révolution de rayon nul, d'axe $\Delta(\delta^2 = 0)$: Π touche donc les deux traces aux points d'intersection

avec D et, si l'on se donne D, il y a bien, en général, comme l'indique l'énoncé, quatre droites Δ associées, savoir les quatre droites d'intersection des plans isotropes menés par les tangentes à Π aux points situés sur D ; ces droites passent par le pôle de D par rapport à Π et comme elles constituent l'intersection des cylindres de rayon nul ayant pour axes les tangentes, elles se projettent sur oxy suivant les bissectrices des angles formés par ces tangentes. L'identification des deux relations $d^2(x, y, 0) - c^2\delta^2(x, y, 0) = 0$ et $y^2 - 2ax = 0$, pour les droites D ($z = 0, ux + vy + w = 0$) et Δ ($x = \alpha z + p, y = \beta z + q$), conduit aux mêmes résultats en fournissant quatre relations entre α, β, p, q dont on tire facilement deux relations du second degré décomposées en p, q : $(pu + qv + w)(av + qu) = 0$ et $(pu + qv + w)(w - pu) = 0$; la relation $pu + qv + w = 0$, conduit à des droites Δ isotropes à rejeter et la solution ordinaire donne le point $p = \frac{w}{u}, q = -\frac{av}{u}$, pôle de D par rapport à Π ; α et β sont alors déter-

minés à partir d'une équation du second degré en $\frac{\beta}{\alpha}$; on obtient ainsi quatre droites Δ , toutes imaginaires si D est réelle et sécante à Π , et dont deux seulement sont réelles si D ne coupe pas Π .

Dans le cas où le rapport des distances est égal à 1, la géométrie ou le calcul montre facilement que D est perpendiculaire à l'axe ox et que les droites Δ associées coupent orthogonalement ox et engendrent un conoïde de Plücker. De même, si D est perpendiculaire à une droite associée Δ , D est perpendiculaire à ox , mais Δ est dans le plan $yo z$ et enveloppe la parabole Π_1 focale de Π .

La seconde partie du problème avait pour but de montrer que les droites Δ n'étaient autres que les génératrices rectilignes des paraboloides homofocaux ayant pour focales Π et Π_1 . A cet effet, on demandait de déterminer les surfaces engendrées par des droites Δ dont le contour apparent relatif à la direction de oz soit la section par le plan oxy . Puisque les projections δ des droites Δ sur oxy sont les bissectrices des tangentes à Π menées par les traces A de ces droites sur oxy , la question se trouve ramenée à la recherche des courbes du plan oxy telles que la tangente en un point A soit bissectrice des tangentes menées à Π par A ; les théorèmes de Poncelet permettent de conclure que ces courbes ne sont autres que les paraboles homofocales à Π ; l'examen géométrique ou le calcul donne presque immédiatement les paraboloides engendrés par les droites Δ . Un calcul simple vérifie la constance du rapport k défini dans l'énoncé pour tout plan passant par une droite Δ donnée et fait réapparaître les paraboloides précédents comme surfaces S_k .

L'enveloppe des plans contenant seulement deux droites Δ rectangulaires et le lieu Σ des points M par lesquels passent seulement deux droites rectangulaires, qui étaient demandés ensuite, se définissaient à partir des résultats déjà obtenus, comme enveloppe des plans tangents aux paraboloides S_k le long de leurs sections par les plans de Monge et comme lieu de ces sections. En particulier Σ était une surface cubique dont l'équation

se mettait sous la forme $\frac{y^2}{x_1 - b} + \frac{z^2}{x_1 + b} + \frac{8}{9} x_1 = 0$.

La recherche des droites de Σ , qui constituait la dernière partie du problème, conduisait à l'existence de 9 droites sur la surface, dont une à l'infini dans yoz et quatre imaginaires : l'examen de leur configuration mettait en évidence quatre points doubles de la surface, en lesquels les cônes des tangentes touchaient Σ suivant trois génératrices et montrait que, parmi les neuf droites, on pouvait trouver trois systèmes de six droites appartenant à une même quadrique. On obtenait ainsi trois quadriques au lieu de deux comme l'indiquait l'énoncé. Nous aurions regretté très vivement cette inexactitude de l'énoncé, si nous n'avions constaté qu'aucune copie ne contenait l'équation de Σ et que personne n'avait pu même aborder la dernière partie du problème.

En faisant cette constatation, on se rend compte de l'effort pénible que les candidats ont dû déployer pour obtenir les droites Δ : la lecture des copies montre que cet effort a été souvent stérile. Une vingtaine de candidats seulement arrivent à déterminer les droites Δ par leur trace sur xoy et par une équation du deuxième degré ou une équation bicarrée fixant leur direction, mais plusieurs ne font même pas cette simple constatation que A est le pôle de D par rapport à Π , trois seulement voient que les projections des droites Δ sont les bissectrices des tangentes à Π menées par A ; la discussion de la réalité est pénible et fautive chez la plupart ; dix au plus songent à s'aider de remarques géométriques. Les autres candidats se bornent à calculer, non sans lourdeur, la distance d'un point à une droite, et à écrire les relations d'identification d'une conique du plan xoy avec la parabole $y^2 - 2ax = 0$, mais se montrent incapables de conduire la résolution du système obtenu, parce qu'ils opèrent sans ordre, sans méthode, sans souci de simplification. La discussion de l'équation $ax + \frac{1}{b} = 0$ est une source fréquente d'erreurs, les facteurs communs à a et b sont couramment supprimés ; par compensation, des fractions telles que $q = \frac{p^2 u^2 - w^2}{vw - puw}$ sont maintenues sous cette forme dans la suite des

calculs : quand un produit de facteurs est nul, un seul bénéficie, en général, de la nullité. Des fautes de raisonnement inspirent quelques inquiétudes sur le jugement de leurs auteurs ; la plus courante est la suivante : après avoir écrit les relations en α, β, p, q exprimant que les distances de tout point de Π à D et à Δ sont proportionnelles, relations manifestement nécessaires et suffisantes, bon nombre de concurrents, pressentant le secours que pourrait leur apporter l'observation géométrique, portent leur attention sur les points d'intersection de D et de Π et concluent que l'un de ces points, à une distance nulle de D est sur Δ , comme si un candidat à l'agrégation pouvait ignorer (surtout quand l'énoncé lui suggère que certaines droites Δ peuvent être imaginaires) que les points (réels ou imaginaires) à une distance nulle d'une droite Δ (réelle ou imaginaire) ne sont pas tous des points de la droite ; les uns tirent la conclusion normale de leur affirmation fautive, à savoir la coïncidence de D et Δ , les autres, qui ne s'embarrassent

pas d'une logique rigoureuse, déduisent que Δ passe par un seul des points communs à D et à II, comme si le raisonnement fait pouvait, suivant les besoins de la cause, s'appliquer à l'un des points et pas à l'autre. Certains énoncent les conclusions précédentes quand D coupe II en des points réels sans se soucier du principe de continuité pourtant si fécond. Les uns et les autres ajoutent finalement aux relations nécessaires et suffisantes précédemment écrites de nouvelles égalités mais sont, presque toujours, incapables de caractériser les solutions exceptionnelles qu'ils obtiennent. Dans le même ordre d'idées, un candidat ne craint pas d'imposer — « sans inconvénient », dit-il — la relation $x^2 + y^2 = 1$ aux coefficients des équations d'une droite $x = \alpha z + p, y = \beta z + q$.

Deux 20, un 19, un 18, trois 17, deux 16, huit 15, cinq 14 ou 14 1/2 récompensent les meilleures copies sur ce premier point (I, 1°) ; vingt autres copies atteignent ou dépassent la moyenne ; quarante-sept viennent ensuite avec une note supérieure ou égale à 5. La moyenne des notes est 9,1.

Aucun candidat n'a pu déterminer exactement à la fois les droites D, Δ pour lesquelles les distances sont égales et celles qui sont rectangulaires ; pour la plupart, la relation $uv = 0$ équivaut, suivant le caprice, à $u = 0$ ou à $v = 0$. Que penser de ceux qui traduisent l'orthogonalité de D et Δ par $u\alpha + v\beta = 0, u\alpha + v\beta + 1 = 0$, ou $u\alpha + v\beta + w = 0$? Pour cette question (I, 2°), douze notes seulement sont supérieures ou égales à 10, la moyenne n'atteint que 2,2.

Trente-trois candidats abordent la seconde partie, mais il n'y en a que deux qui reconnaissent dans le contour apparent demandé une parabole homofocale à II ; un seul indique que la surface cherchée est une quadrique sans autre précision ; un autre prévoit, il est vrai, que « les surfaces sont des hyperboloïdes dont le cercle de gorge est dans oxy » ! Très peu arrivent à exprimer que la section d'une surface par oxy est son contour apparent pour la direction de oz . On n'est pas peu surpris de trouver dans une copie d'agrégation des développements du genre suivant : « Les droites Δ dépendent de 3 paramètres k, λ, z ; établissons entre ces trois paramètres une relation, la droite ne dépend plus que de 2 paramètres et engendre une surface réglée..... les plans tangents parallèles à oz ne dépendent que d'un paramètre, la surface est développable. » Trois candidats établissent la propriété (II, 2°) et déterminent les surfaces S_k sans les préciser. Un 14 1/2, un 13 1/2, un 8 1/2, deux 8, deux 6 et un 5 sont les meilleures notes attribuées pour l'ensemble de la question II ; la moyenne est de 3,2 pour les seuls candidats qui ont attaqué la question.

En revenant à la définition initiale des droites Δ , neuf candidats recherchent les plans contenant deux droites Δ rectangulaires ; deux d'entre eux forment correctement l'équation tangentielle de leur enveloppe ; on relève pour cette dernière partie traitée un 17, un 15, un 12, trois 10, un 6, un 3, un 1.

L'ensemble des compositions est faible ; les meilleures révèlent, certes, des qualités sérieuses d'observation méthodique et un jugement assez sûr, mais aucune ne donne l'impression d'une supériorité indiscutable comme il est arrivé les années précédentes. »

Calcul différentiel et intégral (M. SOULA). — « Aucun candidat n'a traité complètement et correctement le problème de Calcul différentiel et intégral ; rares sont les compositions où la partie B est abordée. On ne trouvera donc pas étonnant que six copies seulement atteignent la moyenne. Il n'y en a que dix entre 8 et 10 et 22 seulement sont cotées entre 5 et 8. La meilleure composition a reçu la note 16 ; elle consacre un calcul maladroit à la première question, elle ne résout pas complètement la sixième, elle ne contient que peu de choses sur la partie B. Mais elle vaut surtout par la façon nette dont les problèmes sont posés et par une vue exacte des vraies difficultés à partir de la deuxième question.

Les candidats ont presque tous abordé les trois premières questions, mais les erreurs et les maladroresses sont nombreuses. Voici quelques observations.

On demande la distance des points focaux d'une génératrice d'une congruence déterminée ; un tel calcul peut toujours être effectué et il était ici particulièrement facile. Il était évident que la réponse devait être effectivement donnée sous la forme $\lambda = F(u, \tau, w, s)$, cette fonction dépendant des quatre variables directement et par l'intermédiaire des dérivées partielles de la fonction f donnée. Bien des candidats ne donnent ni ce résultat définitif, ni le résultat analogue exprimé avec les variables φ et θ . Par contre, il n'est pas si facile d'obtenir les arêtes de rebroussement des développables d'une congruence ; un tel problème dépend de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre ; c'est à cette résolution qu'il est fait allusion dans la question 2° et bien des candidats sont loin de s'en douter. Un seul a dit nettement que l'équation se résout par des quadratures dans le cas où la courbe est une hélice et où la fonction ne dépend pas de s .

Certains candidats confondent une question qui figure au 1° avec la question 2° ; d'autres confondent les courbes de contact des cônes de la question 3° et les arêtes de la question 2°. Assez nombreux sont ceux qui effectuent deux fois un calcul de λ sans s'en apercevoir.

Bien que le problème des questions 4°, 5°, 6° ait été posé un peu brièvement, on en a en général bien compris le sens, mais on n'a pas formulé clairement la méthode de résolution, on n'a pas achevé des calculs bien faciles, on ne s'est guère préoccupé du degré de généralité de la solution, on n'a que rarement donné des remarques géométriques qui s'imposaient. Un candidat a cependant montré nettement l'existence de solutions de la question 6° pour lesquelles la figure F est de grandeur invariable. Pour trouver les cônes de révolution, le plus simple était de se servir du résultat de la 3° question et d'employer les variables u, τ, w , qui conviennent ici mieux que θ et φ . Ce problème n'a été traité par personne.

Quelques compositions qui touchent à la deuxième partie B donnent des méthodes plus ou moins ingénieuses mais qui ne permettent pas de traiter toutes les questions posées. Deux candidats ont donné la réponse presque évidente de la question 9°, un autre fut sur le point d'aboutir par l'emploi d'axes de directions fixes qui conviennent très bien à cette question mais qui ne conviennent pas aux autres.

Les erreurs les plus fréquentes tiennent à ce que les candidats ne cherchent pas assez à bien prendre conscience de ce qui est fixe et de ce qui est variable dans un calcul où figurent des différentielles : de là les confusions relevées plus haut. Signalons encore qu'on ne cherche pas assez à terminer complètement les calculs et à les interpréter, qu'on ne formule pas clairement les méthodes. »

Ce que l'auteur de ce rapport ne dit pas et qu'il convient d'ajouter, c'est que la liste des 36 premiers de la composition d'analyse comprend 30 admissibles et 19 admis.

Mécanique rationnelle (M. PÉRÈS). — « La moyenne générale de l'épreuve a été 7, un peu plus élevée que celle des précédents concours. Le problème proposé était d'ailleurs plus court. Cependant aucune des 99 copies remises n'a été très bonne et la meilleure note attribuée a été 14 ; viennent ensuite trois copies cotées 13, quatre 12, cinq 11, une 10,5 et trois 10. Peu de copies très faibles.

Les questions 1^{re}, 2^{de} et même 4^{de} ont été, sinon complètement traitées, du moins abordées par bon nombre de candidats. La 3^{de} question a été généralement laissée de côté : elle ne demandait pourtant pas beaucoup d'initiative pour transposer, aux mouvements voisins des *M*, des considérations classiques pour la stabilité d'un équilibre. La dernière partie était un peu à part, la force *F* ajoutée donnant des équations dont l'intégration se ramenait à des quadratures : les concurrents se sont retrouvés là sur un terrain favorable et nous avons eu, pour cette question, quelques bonnes réponses.

Dans l'ensemble, les copies témoignent de connaissances suffisantes, mais utilisées parfois de façon assez maladroite. Plusieurs compositions eussent été mieux notées, si leurs auteurs prenaient la peine de bien assurer des résultats préliminaires (valeur absolue de la force vive de *S*, par exemple) dont dépendra toute la suite ; d'autres gagneront s'ils s'efforcent de dominer davantage le mécanisme du calcul. »

Epreuves orales (1).

Les critiques copieuses, qui figurent au rapport du concours de 1931, n'ont pas été sans porter quelques fruits.

Un candidat qui s'en est inspiré, à propos de la résolution de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$, a été amené à rectifier une faute de calcul qui lui eût échappé sans cela. Il a été moins heureux quand il a proposé de résoudre le système d'équations $a \cos x + b \sin x = c$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, en tirant $\cos x$ de la seconde pour le porter dans la première. Il a d'ailleurs reculé devant l'équation irrationnelle qu'il avait construite si maladroitement.

Un emploi judicieux de la remarque relative aux trièdres supplémentaires a valu la note 17 — la meilleure attribuée en élémentaires — à celui qui a fait la leçon correspondante.

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1932 peut être demandée au Bureau (joindre 3 francs en timbres-poste).

A diverses reprises, le Jury a senti que le candidat s'efforçait de tenir compte du rapport de l'an dernier. On ne saurait trop conseiller de le relire et d'y réfléchir, car certaines observations sont restées ignorées ou ont été mal comprises. En particulier, les six relations fondamentales, entre les mesures des côtés et des angles d'un triangle quelconque, ainsi que leurs groupements caractéristiques, ont été présentées avec plus de fantaisie encore que la fois précédente.

Des tentatives manifestes, plus ou moins heureuses, pour lutter contre le dogmatisme. Il est trop commode de dire : « deux méthodes simples se présentent à l'esprit » pour amener la construction par points d'une parabole définie par son foyer et sa directrice, ou « on a l'habitude de traiter l'inscription du décagone régulier avant celle du pentagone ». Ce sont là des transitions dont la portée ne dépasse pas celle de l'effet oratoire.

Pour construire par points une courbe définie par une relation en coordonnées bipolaires (ellipse, hyperbole, lemniscate,...) il est naturel de se donner l'une des coordonnées, ce qui revient à chercher l'intersection de la courbe et d'un cercle centré en l'un des foyers, d'où résulte un premier procédé. Dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole il est également opportun de représenter, sur une droite quelconque passant par un foyer, la somme ou la différence des deux rayons vecteurs d'un point du lieu, situé sur cette droite — c'est un simple retour à la définition ; on est ainsi conduit à l'intersection de la conique avec une droite passant par un foyer, à une nouvelle définition de la courbe et, comme conséquence, au problème général de l'intersection d'une conique et d'une droite. Tout cela s'enchaîne solidement et il n'est pas nécessaire de faire appel à l'autorité des programmes pour traiter ces questions. S'il s'agit d'une lemniscate, la relation $bc = 2Rh$ s'impose de suite et mène à l'intersection de la courbe soit avec une parallèle à la droite qui porte les foyers, soit avec un cercle passant par les foyers.

Si la courbe C est définie par une relation entre les distances d'un de ses points M à un foyer F et à une directrice Δ (ellipse, hyperbole, parabole,...) il est également indiqué de choisir arbitrairement l'une de ces distances et d'en déduire l'autre, ce qui revient à chercher l'intersection du lieu, soit avec un cercle centré en F , soit avec une parallèle à Δ . Or les distances d'un point M , situé sur une droite quelconque D , à Δ d'une part, au point Φ où D rencontre Δ d'autre part, sont proportionnelles, de sorte que la recherche des points communs à C et à D est ramenée à l'intersection de D et d'une nouvelle courbe C' définie en coordonnées bipolaires par rapport aux foyers F et Φ .

Ces remarques générales, provoquées par les préoccupations d'un candidat, sont presque banales ; mais elles préparent, sans effort de mémoire, les développements utilisés dans la géométrie élémentaire des coniques.

La leçon sur l'aire et le volume de la sphère dénote un essai pour mettre en évidence le caractère des définitions ; il eût été bon d'insister un peu plus à ce sujet, la définition du volume s'imposant, alors que celle de la surface est, à ce degré, purement conventionnelle. La transformation de

l'expression habituelle de l'aire latérale d'un tronc de cône, à cette occasion, a fait appel à une raison inopérante ; c'est un point qui reste mal élucidé, malgré des observations antérieures.

Des déplacements inutiles ont reparu à propos de la décomposition du tronc de prisme triangulaire en trois pyramides. La comparaison de ces pyramides qui ont deux à deux un sommet commun et leurs bases correspondantes dans une face latérale du tronc, donne de suite les rapports de leurs volumes en fonction du rapport de similitude des bases parallèles : il en résulte immédiatement que les mesures des volumes des trois pyramides sont des termes consécutifs d'une progression géométrique et par suite que l'une d'elles est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

En géométrie descriptive, le sens d'un rabattement a une importance qui a été méconnue lors du relèvement correspondant.

La traduction analytique d'un problème de géométrie oblige souvent à distinguer plusieurs cas de figure ; s'il est parfois superflu de les étudier tous à fond, au moins convient-il de n'en omettre aucun.

L'étude algébrique de n inégalités du premier degré à 2 inconnues ($n = 1, 2, 3$) n'est vraiment précise que si l'on établit avec soin le régionnement du plan au moyen d'une, deux, trois droites. On trouve en général 7 régions dans le dernier cas, alors que les systèmes d'inégalités sont au nombre de 2^3 : on conclut à une impossibilité pour l'un de ces systèmes.

Une idée bizarre est apparue à propos de la non-définition de la fonction $y = \frac{1}{x}$, pour $x = 0$. Le candidat voulant relier cette singularité à une discontinuité, s'est avisé de donner à x les valeurs $-\epsilon$ et $+\epsilon$ et a constaté que la différence des valeurs correspondantes de la fonction tend vers l'infini quand ϵ tend vers zéro. On se demande quelle eût été sa conclusion s'il avait porté son souci sur la fonction $\frac{1}{x^2}$.

Le Jury n'a pas attaché une importance exagérée à beaucoup de ces fautes et, sauf dans le cas d'un manque de préparation manifeste, il a coté largement les leçons d'élémentaires : cinq notes seulement sont inférieures à 10 et la moyenne est, comme l'an dernier, très voisine de 13.

En spéciales, l'écart des notes est plus considérable qu'en élémentaires, les notes extrêmes étant 18 et 3 (deux fois). 7 sont inférieures à 10 ; la moyenne est, comme l'an dernier, très voisine de 12. Quelques très basses notes sont dues surtout au défaut de préparation : on a constaté parfois, avec regret, un manque de compréhension du sujet.

Les fautes les plus graves ne sont pas nouvelles pour le Jury. Les propriétés des séries entières et en particulier la comparaison des rayons de convergence de deux séries dont l'une est la dérivée de l'autre, la division de deux polynômes entiers suivant les puissances croissantes de la variable, les fonctions symétriques et leurs applications, l'étude du plan tangent à une surface définie par un mode de génération simple, l'équilibre du corps solide gêné, la recherche des branches infinies de l'intersection de deux sur-

faces, en géométrie descriptive, sont des sujets qui, assez régulièrement, n'inspirent pas ceux à qui ils échoient. Aucun cependant ne présente de difficultés insurmontables.

En revanche, plusieurs leçons ont montré un louable souci d'échapper aux critiques du passé. Le Jury a enfin entendu une exposition fortement charpentée, sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Epreuves pratiques.

Calcul numérique. (M. PÉRÈS). — « La méthode trigonométrique était assez indiquée pour le calcul des racines d'une équation du troisième degré et bien des candidats l'ont utilisée. D'autres ont employé la méthode d'interpolation ou la méthode de Newton avec plus ou moins de maîtrise. Les calculs sont quelquefois longs pour une approximation médiocre. Il arrive même que, par suite d'erreurs ou de négligences malheureuses — mais qu'il était facile de dépister — les approximations successives s'écartent de la racine cherchée. Un peu de réflexion ne nuit pas, même dans le calcul numérique.

L'un des candidats obtient, après des calculs soignés, les valeurs suivantes des racines : — 4,666, — 2,340, 3,130. Il les enregistre sans hésiter, alors qu'il saute aux yeux que l'équation proposée a une seule racine négative. L'erreur commise (confusion entre un sinus et un cosinus) est vénielle : elle est inexcusable.

Deux copies seulement ont donné des réponses satisfaisantes à la deuxième question (variation des racines pour des accroissements donnés des coefficients). »

Dans ces conditions, la répartition suivante des notes : dix de 10 à 18, treize de 7 à 9, treize de 3 à 6, n'a rien de surprenant. Elle n'en est pas moins regrettable.

Epure de géométrie descriptive (M. HENNEQUIN). — « La composition d'épure comportait la recherche de l'intersection d'un cône C, qui avait pour base, dans un plan horizontal, une strophoïde droite et pour sommet S un point de la verticale du point double, et d'un hyperboloïde à deux nappes H ayant un plan de section cyclique horizontal, un ombilic en S et une direction asymptotique verticale.

Il découlait de là que l'intersection se composait des droites isotropes horizontales de S et d'une biquadratique ayant un point double à l'infini, dans la direction verticale et, par suite, projetée horizontalement suivant une conique. L'étude des directions asymptotiques donnait la direction verticale (direction asymptotique triple) et une direction de front (simple) ; à cette dernière correspondait une asymptote projetée frontalement suivant une génératrice de contour apparent de C, et horizontalement suivant une asymptote de la conique projection qui était, par conséquent, une hyperbole ; à la direction verticale correspondait une asymptote verticale à distance finie, passant par le centre de H et une asymptote à l'infini dans un

plan vertical parallèle à l'un des plans tangents à C le long de la génératrice double ; les branches paraboliques correspondantes se projetaient frontalement suivant des branches paraboliques et horizontalement suivant des branches de l'hyperbole dont l'asymptote se construisait sans peine en utilisant la première asymptote tracée, le point s , la tangente de profil en ce point et la deuxième direction asymptotique.

Le tracé de l'intersection se faisait facilement à partir de l'hyperbole ; on pouvait d'ailleurs chercher directement l'intersection d'une génératrice du cône avec H, soit en utilisant les points d'intersection de la génératrice avec le cône asymptote, soit en faisant la projection conique de centre S, sur le plan de base, du cercle horizontal de H s'appuyant sur la génératrice. Au point S, la tangente à l'intersection était la génératrice de bout du cône et s' était un point de rebroussement de la projection frontale en lequel la tangente était la trace du plan tangent au cône, c'était un point de rebroussement de seconde espèce.

La représentation demandée n'offrait pas de difficulté sérieuse ; les cercles de H étaient projetés horizontalement suivant les cercles d'un faisceau ayant pour points limites les projections s et a des ombilics de H à plan tangent horizontal, ceux d'une même nappe étant projetés d'un même côté de l'axe radical et vus pour l'une des nappes sur la face externe, pour l'autre sur la face interne.

Des trente-six candidats, un seul a obtenu, par une étude géométrique, les résultats relatifs à la décomposition de l'intersection et à sa projection horizontale, un autre a dû s'aider de calculs pour atteindre le même but ; quelques-uns ont reconnu la présence de droites isotropes dans l'intersection, mais n'ont pas vu l'abaissement du degré de la projection horizontale ; d'autres ont signalé le point double à l'infini dans la direction verticale sans reconnaître la décomposition. La plupart ne se soucient pas de connaître la nature de l'intersection. Certains négligent complètement l'étude des branches infinies, qui n'est faite correctement (à part l'asymptote en projection horizontale) que dans seize épreuves.

Une très bonne épreuve ne contient qu'une très légère erreur dans la représentation et obtient 19 : six autres seulement sont au-dessus de la moyenne avec un 15, un 13, trois 12, un 11 ; viennent ensuite un 10, quatre 9, deux 8, deux 7, un 6, six 5, sept 4, trois 3, trois 2. Les dernières épreuves se bornent au tracé de la strophoïde. La moyenne des notes est 6,9. L'impression d'ensemble confirme celle que donnait la composition de mathématiques spéciales : les connaissances géométriques des candidats sont des plus restreintes. »

Si le concours ne comportait que des épreuves écrites et des épreuves pratiques, la liste d'admission eût été fort réduite. Grâce aux résultats des épreuves orales, le Jury a cru pouvoir proposer 21 noms à l'agrément de M. le Ministre, pour l'admission définitive.

Si, en tête de liste, les moyennes sont inférieures à celles de l'an dernier, il n'en est plus de même à la fin. En outre, cinq des candidats écartés ont,

dans l'ensemble, une moyenne inférieure de moins d'un demi-point à celle du dernier retenu.

Des 15 admissibles qui ont été évincés, une bonne proportion semble devoir légitimement prétendre au titre d'agrégé, dans l'avenir.

La liste d'admission comprend les neuf normaliens, dont 6 dans les sept premiers et les autres dans les cinq derniers, 7 candidats qui enseignent à des titres divers, 4 étudiants et 1 militaire. Le succès de ce dernier doit donner courage à ceux que les circonstances appellent au service : la persévérance et la ténacité dans l'effort renversent bien des obstacles.

L'Inspecteur général, président du Jury,

E. BLUTEL.
