

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1932**

Le concours de 1932 a donné de faibles résultats ; il n'a pas réalisé les promesses du précédent, et les progrès, constatés en 1931, concernant les qualités d'ordre, d'équilibre, d'exposition, ne se sont pas maintenus. Sur ce point, comme sur la substance qualitative, le concours est en régression par rapport aux précédents.

284 élèves ont pris part à l'épreuve ; ce chiffre est nettement inférieur à celui des années précédentes qui oscillait autour de 400, qui s'était approché de 500 en 1931 ; il est dû peut-être à une sélection spontanée, mais plutôt à la natalité déficiente des premières années de guerre. Sur ces 284 copies, le Jury, malgré beaucoup d'indulgence, n'a pu en retenir, après une première lecture, que 30 présentant quelque valeur, et, parmi celles-ci, n'en reconnaître que 9 dignes d'être récompensées.

Et cependant, le sujet avait été intentionnellement choisi à un niveau plus accessible. Il avait un caractère mixte, mi-géométrique, mi-algébrique ; les seules connaissances qu'il exigeait se réduisaient sensiblement, en

Géométrie, aux qualités du triangle rectangle, au théorème de Pythagore surtout, au parallélisme des droites perpendiculaires à un même plan, aux expressions du volume des pyramides et troncs de prisme triangulaires, à la nature de l'intersection de deux sphères ; en Algèbre, aux règles du calcul des polynômes entiers, parmi lesquelles, particulièrement, celle du carré d'un binôme, aux équations du 1^{er} degré, puis aussi, nous l'avouons, mais ceci était destiné à l'élite, et une seule copie d'ailleurs en a fait mention, à la règle classique du signe du trinôme. Mais ce caractère mixte, cette absence de propriétés réputées pour savantes, auront sans doute déconcerté des élèves dont le désir est de briller, qui ne reconnaissent plus les terrains sur lesquels ils se sont exercés.

Le thème proposé (1) concernait une surface prismatique triangulaire définie par sa section droite ABC et les côtés a, b, c , de cette section, surface qu'un plan variable coupe suivant un triangle PQR, ce plan étant défini par les abscisses respectives $x = \overline{AP}$, $y = \overline{BQ}$, $z = \overline{CR}$ de ses points d'intersection avec les arêtes. La première question posée était de chercher la condition reliant x, y , lorsque R étant confondu avec C, le triangle PQR est rectangle en ce point R. Question très simple, et condition qui a été à peu près unanimement obtenue. Mais déjà, en dépit de cette simplicité, que de développements défectueux, quelle floraison de dogmatisme, d'artifices, alors que la voie naturelle est tracée ! « On assujettit le triangle PQR à être rectangle en R », disent les premiers mots du texte ; on impose donc au triangle une condition, et le texte y insiste puisqu'il demande la relation qu'elle entraîne entre x et y . C'est le « de quoi s'agit-il ? » dans toute sa force. Les premières lignes de la réponse devraient donc être de traduire qu'un triangle est rectangle ; les moyens n'en manquent pas ; le plus simple, le plus naturel, est la relation de Pythagore ; on aurait pu en choisir d'autres parmi les relations métriques concernant le triangle rectangle, écrire que l'hypoténuse PQ est double de la médiane correspondante ; ç'eût été maladroit, fantaisiste, mais logique ; tous ces moyens mettaient en évidence le caractère nécessaire et suffisant, qui a été trop souvent négligé, de la condition demandée. Ce point de départ imposait ensuite le calcul, très facile, des côtés de PQR en fonction de a, b, c, x, y , et la condition était ainsi formée. C'était la marche directe et sûre, où tout était dit. Au lieu de cela, nos élèves écrivent de suite des relations exactes, telles que $\overline{PQ}^2 = b^2 + x^2$, sans donner les raisons qui les font intervenir ; ils en tirent d'ingénieuses combinaisons, ils ajoutent leurs relations, et sont satisfaits d'arriver, comme par une heureuse surprise, à la relation demandée : $xy = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}$.

« Que devient cette relation lorsque l'angle ACB est droit ? ». La réponse est immédiate, brutale ; c'est $xy = 0$, P se confondant avec A ou Q avec B. Beaucoup s'en contentent, quand ils ne disent pas sèchement

(1) Voir l'énoncé page 5 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours de 1932*.

que x ou y est nul, parfois qu'ils le sont tous deux. Bien peu reconnaissent qu'ils retrouvent ici la proposition classique sur la projection de l'angle droit ; certains le sentent et croient devoir, parfois péniblement ou incorrectement, en répéter la démonstration qu'ils ont apprise. Ils ne poussent pas plus loin leur curiosité. Trop rares sont ceux qui s'arrêtent au caractère algébrique des grandeurs x, y , qui constatent que xy est positif ou négatif suivant que l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus ou aigu, que PQ coupe AB entre A et B dans le premier cas, au-delà dans le second. Ce caractère algébrique échappe d'ailleurs dès le calcul donnant $\overline{PQ}^2 = c^2 + (x - y)^2$; la formule de Chasles est ici trop souvent ignorée ; on en reste à des calculs de pures longueurs, exigeant des hypothèses de position que l'on n'énonce pas.

Nous nous attardons sur ces premiers alinéas, très simples ; c'est qu'ils ont été traités, avec des fortunes très variées, par tous les concurrents, qu'ils se prêtent donc mieux à des remarques d'ensemble, et que les observations que nous avons à présenter sur ces seuls points sont déjà les mêmes que celles qui vont s'imposer par la suite, quoique ne portant alors plus que sur un nombre restreint de copies.

Une conclusion géométrique s'intercalait ici, qui proposait de « montrer que le côté PQ est constamment vu sous un angle droit d'une infinité de points ». Le mot « constamment » n'a pas toujours été ni remarqué, ni compris ; beaucoup répètent une démonstration apprise, et donnent comme lieu demandé la sphère de diamètre PQ ; ils ne voient pas qu'il s'agit de chercher si cette sphère passe par des points fixes ; les meilleurs sont seuls à constater que toutes ces sphères passent par C , que leurs centres sont alignés, qu'elles ont donc en commun un cercle, qui est le lieu demandé, cercle situé dans le plan ABC , passant par C , ayant son centre au milieu de AB .

La première partie se terminait par une question de calcul, consistant à trouver x, y , connaissant la surface $S = zk^2$, du triangle PQR . L'équation du problème

$$16k^4 = (a^2 + y^2)(b^2 + x^2) = a^2b^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + x^2y^2$$

se formait immédiatement. Associée à la première condition, qui donne xy , elle se transforme en l'équation :

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 16k^4 - a^2b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4},$$

d'où, ainsi que le texte l'indiquait, les valeurs des carrés de $ax + by$, $ax - by$, puis de ces expressions elles-mêmes, et enfin de x et y . Les concurrents ont bien suivi l'indication, mais en discutant rarement les diverses circonstances de ce calcul ; un seul a eu le souci de s'assurer que les combinaisons donnant $(ax + by)^2$, $(ax - by)^2$ constituent un système équivalent au premier ; bien peu ont eu la préoccupation des doubles signes et par suite du nombre de solutions ainsi que de leur disposition, de leur symétrie par rapport au plan ABC .

Plus rares encore sont ceux qui, ayant exprimé la solution par des racines

carrées, songent à discuter l'existence de celles-ci ; la discussion montre de suite que $16k^4$ doit être supérieur aux deux nombres

$$a^2b^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4} \pm ab(a^2 + b^2 - c^2),$$

donc au plus grand d'entre eux, donc que l'aire PQR a un minimum, puis que la réalisation de ce minimum dépend du signe de $a^2 + b^2 - c^2$, donc de la nature de l'angle $\widehat{ACB}$, et que, suivant que cet angle est aigu ou obtus, le minimum a lieu pour $ax + by = 0$ ou $ax - by = 0$, autrement dit

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{-a} \text{ ou } \frac{x}{b} = \frac{y}{a}, \text{ c'est-à-dire lorsque le plan PQR passe par la bissec-}$$

trice intérieure ou extérieure de l'angle $\widehat{ACB}$. Cette voie, de l'observation directe et complète, n'a été suivie que par un seul, le second du classement ; les autres ne virent que la ligne du texte demandant un minimum ; ils l'isolent des précédentes et font appel à leurs souvenirs ; ils voient que la surface varie comme l'une des combinaisons $a^2x^2 + b^2y^2$, $(ax + by)^2$, $(ax - by)^2$, et reconnaissent avec l'une ou l'autre une somme de deux nombres dont le produit est constant ; mais ils ne précisent pas d'avantage, leurs souvenirs ne leur rappellent pas qu'il y a lieu d'examiner s'il s'agit de nombres positifs, si ceux-ci peuvent prendre toutes les valeurs ; la contradiction à laquelle ils seraient ainsi conduits, en usant des deux dernières combinaisons, en arrivant à un minimum atteint pour $ax = by$, comme pour $ax = -by$, ne les rend même pas circonspects.

Dans la seconde partie du problème, le point R n'étant plus fixé en C, on demandait de calculer l'aire S du triangle PQR en fonction de a, b, c, x, y, z ; une parenthèse rappelait l'expression de S_0^2 , carré de l'aire ABC, en fonction de a, b, c . La question se réduisait donc à un simple problème de calcul, consistant à remplacer dans S_0^2 les carrés de a, b, c par ceux des côtés de PQR, a^2 , par exemple, par $a^2 + (y - z)^2$. La plupart en sont restés là, ou ont développé tous les carrés tels que $[a^2 + (y - z)^2]^2$ et tous les produits tels que $[a^2 + (y - z)^2][b^2 + (z - x)^2]$. Ici, ce sont surtout les qualités d'ordre qui ont fait défaut. La formation d'un seul produit annonce de suite que $16S^2$ apparaît comme un polynôme entier se séparant en trois parties formées respectivement de termes constants, du second degré et du quatrième degré en x, y, z , que la première partie reproduit $16S_0^2$, et que la troisième se déduit de la première en y remplaçant a^2, b^2, c^2 par $(y - z)^2, (z - x)^2, (x - y)^2$; le texte annonçait que celle-ci disparaît en demandant de l'établir sans calcul ; il résulte de ce qui précède qu'elle représente en effet le carré de l'aire d'un triangle dont les côtés, égaux aux valeurs absolues des trois différences $y - z, z - x, x - y$, sont tels que l'un d'eux est égal à la somme des deux autres. Cela étant, on arrive donc à $16S^2 = 16S_0^2 + f(x, y, z)$, f étant un polynôme homogène du second degré en x, y, z , somme de trois termes de la forme $2(y - z)^2(b^2 + c^2 - a^2)$; comme S est l'aire PQR, S_0 celle de sa projection ABC, f n'est nul que pour $x = y = z$, dans le cas où le plan PQR est parallèle à ABC : il est positif dans toute autre hypothèse. Il y avait à le

vérifier par le calcul ; c'était une application classique de la règle du signe du trinôme ; f est, en effet, un trinôme du second degré en x , et son discriminant, calculé sans aucun artifice, apparaît comme égal à $-16 S_0^2(y-z)^2$. La vérification de calcul, concernant ce qui a été dit des termes du 4^e degré se faisait aussi facilement, en y apportant de l'ordre, en calculant séparément les termes de même forme, en x^4 , en x^3y , en x^2y^2 et x^2yz .

La fin du problème concernait des études de volumes. Supposant x, y, z tous positifs, de sorte que ABCPQR constitue un tronc de prisme triangulaire droit, on décomposait ce solide en pyramides ayant pour sommet commun un point quelconque I du plan PQR, intérieur au triangle. Ici, les volumes partiels, comme le volume total, ont été, en général, évalués correctement par ceux qui ont abordé ces parties, et calculés en fonction de x, y, z, a, b, c , et des éléments qui fixent la position de I, savoir sa distance $h = IH$ au plan ABC, et les distances α, β, γ de H aux côtés de ABC ; on sent que nos élèves de Première sont exercés à des évaluations de volumes. Ils sont moins heureux lorsqu'il s'agit de tirer parti de ces mesures ; ils en ont bien déduit une relation entre les volumes partiels et le volume total, relation linéaire entre x, y, z vérifiée avec tous les plans PQR passant par un point fixe I, mais établie seulement, comme on le demandait, pour le cas de x, y, z tous positifs, c'est-à-dire d'une configuration restant toujours celle du tronc de prisme. Cette relation contient des constantes surabondantes, du fait que S_0 , aire ABC, est la somme de trois aires partielles formées en joignant H à A, B, C. Pour mettre les élèves en présence de cette condition, le texte demandait ce que devient la relation entre x, y, z lorsque ces variables sont égales ; à quoi la réponse a été d'écrire brutalement $x = y = z$ sans s'attacher à la signification de cette hypothèse, à savoir que le plan PQR est parallèle à ABC, ce qui entraîne $h = x$, égalité qui fait que la relation devient $2S_0 = \alpha x + \beta y + \gamma z$, condition qui permet alors de mettre la relation générale sous la forme simple $\alpha x + \beta y + \gamma z = 2S_0 h$. Certains, plus heureux que les autres, ou montrant des connaissances qui ne leur sont pas imposées, sont arrivés à cette forme simple, en rappelant ou en établissant à part l'expression précédente de S_0 ; la substitution $x = y = z$ leur donnait alors $x = h$, conclusion qu'ils donnaient sans commentaire, ou avec le bon esprit de signaler que ce résultat est évident.

Réciproquement, on demandait ce que l'on peut dire du plan PQR, lorsque x, y, z , toujours positifs, restent constamment reliés par une condition de la forme $Ax + By + Cz = D$, où les constantes sont toutes positives. La réponse a bien été, lorsqu'elle a été donnée, que le plan PQR passe par un point fixe ; mais, à trois exceptions près, elle était justifiée par l'égalité et non la proportionnalité des coefficients à ceux de la relation précédente : l'égalité déterminait des valeurs de α, β, γ, h , et l'on ne s'occupait pas de vérifier la condition imposée à α, β, γ . Il est excusable de tomber dans un piège quand on le rencontre pour la première fois ; l'excuse n'est plus admise avec un sujet averti, et nos élèves ont déjà dû recevoir au moins deux fois l'avertissement, soit lorsqu'ils ont constaté que la simple

équation du 1^{er} degré à une inconnue n'a pas ses deux coefficients déterminés par la solution, soit lorsqu'ils ont rencontré le cas de l'indétermination dans l'étude du système de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues.

La quatrième et dernière partie était surtout une application de ce qui précède. Elle demandait comment varie le plan PQR, soit lorsque le volume du tronc de prisme reste constant, soit lorsque sa surface latérale reste constante, soit lorsque les trois faces latérales ont des aires équivalentes, et de déterminer ensuite, parmi les plans satisfaisant, séparément ou simultanément, aux deux premières conditions, ceux pour lesquels l'aire PQR est minimum.

Les deux premières conditions se traduisent respectivement par les relations

$$x + y + z = \text{const.}, \quad a(y + z) + b(z + x) + c(x + y) = \text{const.};$$

elles sont toutes deux de la forme précédemment étudiée, de sorte que, dans chaque cas, le plan PQR passe par un point fixe I : dans la première hypothèse, ce point I, défini par $ax = b\beta = c\gamma$, est tel que sa projection H donne des triangles BCH, CAH, ABH d'aires équivalentes, c'est-à-dire sa place au centre de gravité du triangle ABC. Avec la seconde hypothèse,

I se place facilement en interprétant les combinaisons $x' = \frac{y+z}{2}$,

$y' = \frac{z+x}{2}$, $z' = \frac{x+y}{2}$ qui, le texte l'indiquait, substituent au triangle

ABC le triangle A'B'C' ayant pour sommets les milieux des côtés du premier, et à la surface primatique proposée celle d'arêtes parallèles menées par A', B', C' ; x', y', z' sont les abscisses des points P', Q', R' où le plan PQR rencontre les arêtes de la seconde surface ; l'hypothèse se traduit alors par $a'x' + b'y' + c'z' = \text{const.}$, a', b', c' étant les côtés de A'B'C' ; le point H, projection de I, répond à $x' = \beta' = \gamma'$; il est équidistant des trois côtés de A'B'C', il se place au centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Lorsque le plan PQR varie en satisfaisant, séparément ou simultanément à ces deux conditions, l'aire PQR a une projection ABC invariable ; elle est minimum quand l'angle des plans ABC, PQR est le plus petit possible. S'il n'y a qu'une condition isolée, le minimum a lieu lorsque PQR est parallèle à ABC ; si les conditions sont simultanées, et si les points fixes n'ont pas la même projection, c'est-à-dire si le triangle ABC n'est pas équilatéral, le minimum est réalisé avec le plan qui a pour ligne de plus grande pente la droite des deux points fixes. Seul l'élève classé premier a bien mis ces points en évidence.

Lorsque les faces latérales du tronc ont des aires équivalentes, on a :

$$a(y + z) = b(z + x) = c(x + y), \quad \text{ou} \quad a'x' = b'y' = c'z';$$

il est bien exact de dire encore, avec un concurrent, que ces relations sont linéaires, que chacune d'elles exprime que le plan PQR passe par un point fixe ; mais comme l'étude générale n'a été faite qu'avec des coefficients positifs, cette conclusion n'est pas justifiée. On levait l'objection en

reconnaissant, dans la seconde forme, l'une des conditions déjà rencontrées à la fin de la première partie, laquelle exprime que $P'Q'$ rencontre $A'B'$ au même point que la bissectrice extérieure de l'angle $A'C'B'$; associant les deux égalités, on constate ainsi que le plan PQR passe par une droite fixe, laquelle joint les points de rencontre des bissectrices extérieures du triangle $A'B'C'$ avec les côtés opposés. Ce résultat complet a été établi, et bien établi, comme le précédent, par notre premier prix ; serait-ce par modestie que ce dernier croit devoir ajouter qu'il connaît l'alignement en question, plutôt que de constater qu'il vient d'en découvrir une démonstration ?

Ainsi nos élèves, des meilleurs aux plus faibles, ne savent pas assez faire œuvre personnelle. Ils croient que le meilleur est celui qui a acquis le plus de connaissances, qui en fait un brillant étalage ; ils ne soupçonnent pas qu'un jugement reposant sur une observation personnelle, dégagé de toute influence étrangère, est à la fois le plus complet et le plus clair. Dans la classe de Première, une classe d'Humanités, le bagage de connaissances mathématiques à acquérir est des plus légers ; il se réduit à quelques idées générales, à quelques notions fondamentales traduites en un langage simple ; que nos élèves s'en contentent, leur satisfaction n'en sera que plus grande, à découvrir le parti que, livrés à eux-mêmes, ils peuvent en tirer.

De nos 284 concurrents, les trois premiers ont traité le sujet, plus ou moins complètement, sans faute grave, avec des parties de réelle valeur que nous avons signalées au cours de ces lignes. Avec les suivants, les lacunes prennent rapidement plus de profondeur, les erreurs plus de gravité, et les copies couronnées sont celles qui rachètent leurs erreurs par de bonnes parties. Mais, ces qualités disparaissant à leur tour, le Jury a dû, en le regrettant, arrêter sa liste à un 6^e accessit.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

A. TRESSE.
