

3. Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1932

Le sujet proposé (1) visait la détermination des plans P qui passent par un point donné h et qui rencontrent trois droites concourantes données, SA , SB , SC , non situées dans un même plan, aux sommets a , b , c , d'un triangle dont h est l'orthocentre.

Si aa' , bb' , cc' sont les hauteurs de ce triangle, il faut et il suffit que ha' soit perpendiculaire à bc et hb' perpendiculaire à ac . La première de ces conditions impose à la droite bc d'être tangente à une parabole Π_A qui a pour foyer la projection orthogonale h_A du point h sur le plan BSC et pour directrice l'intersection $S\alpha$ de ce plan et du plan ASh . La seconde place de même la droite ac dans l'ensemble des tangentes à une parabole Π_B qui a pour foyer la projection h_B du point h sur le plan ASC et pour directrice l'intersection $S\beta$ de ce plan et du plan BSH .

Le plan P cherché serait donc un plan tangent commun aux deux cônes qui ont h comme sommet et pour directrices respectives les paraboles Π_A et Π_B . Il va de soi que ces plans sont tangents à un troisième cône qui a pour base Π_C .

Mais il s'agit là d'un problème du 4^e degré, dont la solution n'est pas du programme de mathématiques élémentaires ; aussi avait-on choisi le point h dans le plan projetant orthogonalement SA sur le plan BSC , en SA' . Dans ce cas, l'enveloppe Π_A de la trace bc du plan P satisfaisant à la première condition, se réduit au point h_A qui est situé sur SA' et au point à l'infini, sur une perpendiculaire à SA' , dans le plan BSC , de sorte que les droites bc se partagent en deux catégories :

- 1^o celles qui passent par h_A (ou a') ;
- 2^o celles qui sont perpendiculaires à SA' .

Les plans P correspondants pivotent autour de la perpendiculaire ha' au plan BSC , ou de la perpendiculaire ha'' au plan ASA' . Les plans associés à un orthocentre h du plan ASA' sont alors les plans tangents menés par ha' ou ha'' au cône h (Π_B) et on est ramené à deux problèmes du second degré.

La définition de la parabole Π_A et l'examen de sa dégénérescence faisaient l'objet de la première partie du problème (§ I). Il n'y avait rien là qui dépassât les moyens d'un honnête élève de mathématiques élémentaires.

La position du point h avait été particularisée plus complètement encore dans une seconde partie ; on le supposait placé sur l'intersection Δ des deux plans SAA' et SBB' . Les plans P correspondants contiennent alors l'une des droites ha' ou ha'' et l'une des droites analogues hb' ou hb'' ; ils sont donc au nombre de quatre. Trois d'entre eux sont perpendiculaires respectivement à SA , SB ou SC , le dernier est perpendiculaire à Δ . Il en résulte

(1) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours* en 1932.

que les plans SAA' , SBB' , SCC'' se coupent suivant Δ ; cette propriété a été rappelée par ceux qui la connaissaient, mais elle n'a guère attiré l'attention des autres.

En outre, on mettait en évidence des points h pour lesquels le problème proposé admet quatre solutions.

Une troisième partie posait de façon précise le problème de la détermination des plans P qui correspondent à un point h situé dans le plan SAA' , de la répartition de ces plans par couples dans deux séries distinctes et, en particulier, la recherche des points h pour lesquels les deux couples ont un plan commun. Ce plan passant par ha' et ha'' est perpendiculaire à SA' . Sa direction est fixe et le lieu de h est une droite passant par S . On retrouve ainsi une catégorie de points h par lesquels passent quatre plans P , dont deux confondus.

Une autre remarque s'impose à cette occasion et souligne l'importance de l'homothétie par rapport au point S dans toute cette question : si un point h est orthocentre du triangle défini par un plan P , tout point h' de la droite Sh est l'orthocentre du triangle défini par un plan P' , mené par h' et parallèle à P .

La détermination des plans P , qui résulte de l'analyse précédente, se prête suffisamment à la construction de ces plans ; elle renseigne assez mal sur l'association des plans d'un même couple à cause du déplacement de la parabole Π_B liée à un point variable h . Pour la même raison, elle ne donne que des renseignements banaux sur l'existence des plans d'une série.

C'est pis encore si l'on veut, du même point de vue, comparer les deux séries. Aussi, l'énoncé demandant d'indiquer une construction géométrique des plans de la première série (§ IV), et des plans de la seconde (§ V), orientait-il les concurrents vers d'autres constructions. Il restait assez imprécis pour que leur initiative s'exercât à ce sujet.

Les questions angulaires, posées à propos des plans d'un même couple, conduisaient à la recherche des traces de ces plans sur un plan perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire sur le plan SBC pour la première série, sur le plan SAA' pour la seconde. C'est ce qu'a bien vu l'auteur de la copie classée au premier rang ; celui de la copie placée au second ne l'a vu que partiellement.

Une droite bc , menée par le point a' , donné en même temps que h , est définie par la condition $\overline{a'b} \cdot \overline{a'c} = -\overline{a'a} \cdot \overline{a'h} = p$, a étant le point de rencontre de ha' et de SA . Il en résulte que c est l'un des points d'intersection c_1 , c_2 de SC et du cercle (δ) inverse de SB par rapport au pôle a' , avec le module p . Les droites $b_1a'c_1$, $b_2a'c_2$, ainsi définies, sont les traces de deux plans P_1 , P_2 de la première série, qui correspondent au point h . Comme les deux couples de points inverses (b_1, c_1) , (b_2, c_2) sont sur un cercle, les cordes b_1c_1 , b_2c_2 de ce cercle sont antiparallèles par rapport à SB , SC , c'est-à-dire également inclinées sur les bissectrices des angles $\widehat{BSC}$. Les plans bissecteurs de P_1 et P_2 sont donc parallèles à ceux des plans perpendiculaires à BSC , menés respectivement par SB ou SC . Si a' reste fixe et que h se

déplace sur la droite $a'a$, les angles des plans P_1 et P_2 varient ; ils sont égaux aux angles sous lesquels se coupent la droite SC et le cercle (δ) . Ces angles sont droits pour une position de h et ont des valeurs données pour deux positions du même point. Il en résulte que le lieu des points h , tels que les deux plans associés de la première série soient rectangulaires, est une droite Sh ; le lieu correspondant à des plans dont les angles sont donnés (0 et π ne sont pas exclus), se compose de deux droites issues de S .

Considérons les plans de la seconde série, qui ont pour trace, sur le plan SBC , une droite donnée $ba'c$, perpendiculaire à SA' . Le lieu du point h associé à chacun d'eux est défini, dans le plan ASA' , par la relation $\overline{a'h} \cdot \overline{a'a} = -\overline{a'b} \cdot \overline{a'c} = q$, a étant un point variable sur SA . Ce lieu est le cercle (ϵ) inverse de SA' par rapport au pôle a' avec le module q . Utilisons l'homothétie signalée plus haut. Un point h étant choisi dans le plan SAA' , prenons les points de rencontre h_1 et h_2 de Sh et du cercle (ϵ) : ce sont les points h associés respectivement aux plans bch_1 et bch_2 . Par suite, les plans Q_1 et Q_2 de la seconde série, qui correspondent au point donné h , sont les plans menés par ce point parallèlement à l'un ou à l'autre des précédents. Leurs propriétés angulaires en résultent de suite. Ils sont orthogonaux si Sh passe par le centre de (ϵ) . Leurs angles peuvent devenir égaux à 0 et π si S est à l'extérieur de (ϵ) ; ils peuvent alors prendre des valeurs données, pour deux positions de Sh ; ils ne varient qu'entre certaines limites si S est à l'intérieur de (ϵ) .

Ces constructions se prêtent assez bien à l'examen des conditions d'existence des plans P qui correspondent à un point h (§ VI). Pour que les plans P_1 et P_2 de la première série existent, il faut et il suffit que le cercle (δ) coupe SC . Soit I le point de rencontre de SC de la parallèle à SB , menée par a' . Tout cercle (δ) appartient au faisceau des cercles tangents à Ia' au point a' . Parmi les cercles de ce faisceau, il en est deux (δ_0) et (δ'_0) qui sont tangents à SC , l'un en C_0 , l'autre en C'_0 ; I est d'ailleurs le milieu de $C_0C'_0$. Soient h_0 et h'_0 les orthocentres correspondants aux plans P dont les traces respectives $a'c_0$ et $a'c'_0$ sont parallèles à l'une des bissectrices des angles $\widehat{BSC}$. Quand c décrit le segment $c_0c'_0$, le produit $\overline{a'b} \cdot \overline{a'c}$ croît de $\overline{a'b_0} \cdot \overline{a'c_0}$ à l'infini (quand c est en I), puis décroît de l'infini à $\overline{a'b'_0} \cdot \overline{a'c'_0}$. D'ailleurs, le produit $\overline{a'b} \cdot \overline{a'c}$ change de signe quand c passe par I . Le point h défini par la relation $\overline{a'a} \cdot \overline{a'h} = -\overline{a'b} \cdot \overline{a'c}$ se déplace, dans ces conditions, suivant deux demi-droites qui ont pour origines respectives h_0 et h'_0 et qui sont situées de part et d'autre du plan BSC . Le point h doit donc être à l'extérieur de la région (R) balayée par une droite qui passe par S et rencontre le segment $h_0h'_0$.

Pour que les plans Q_1 et Q_2 de la seconde série existent, il faut et il suffit que la droite Sh coupe le cercle (ϵ) , inverse de SA par rapport au pôle a' , avec le module q . Ce cercle rencontre SA' en a' et au point σ inverse de S ; ce point σ est l'orthocentre du triangle Sbc . Si l'angle $\widehat{bSc}$ est obtus (ce qui place a' entre b et c), S est sur le segment $a'\sigma$ et par suite

à l'intérieur du cercle (ϵ). A tout point h du plan ASA' correspondent alors deux plans Q_1 et Q_2 .

Si l'angle $\widehat{bSc}$ est aigu, le point S est sur un prolongement du segment $a's$ et par suite à l'extérieur du cercle (ϵ). On peut mener de ce point deux tangentes au cercle : ce sont les positions limites de la droite Sh ; elles définissent une région inutile (R') extérieure à (ϵ).

Il reste à rapprocher les résultats de ces deux discussions, ce qui est la partie vraiment délicate du problème (§ VII). On est conduit à distinguer deux cas.

1° L'angle $\widehat{bSc}$ est obtus. — Les deux plans Q_1 et Q_2 existent toujours. Les deux plans P_1 et P_2 existent ou non suivant que h est à l'extérieur ou à l'intérieur de la région (R). Le problème a quatre solutions ou deux ; il en a trois, comme cas limite, si h est sur Sh_0 ou Sh'_0 .

2° L'angle $\widehat{bSc}$ est aigu. — Il y a lieu de comparer les régions inutiles (R) et (R') obtenues au § VI, et, pour cela, d'étudier ces régions de plus près.

Pour préciser mieux encore, supposons que a' soit entre b et c . Désignons par boc_0 la perpendiculaire et par $b'oc'_0$ la parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{bSc}$, menées par a' , de sorte que $\overline{a'b_0} \cdot \overline{a'c_0}$ est négatif, tandis que $\overline{a'b'_0} \cdot \overline{a'c'_0}$ est positif.

Faisons varier l'inclinaison de SA sur le plan SBC en tenant compte de la symétrie par rapport à ce plan ; il suffit de faire croître l'angle

$B = \widehat{ASA'}$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions, le point a décrit la demi-droite

$a'x$ (sens positif), perpendiculaire à Sa' , dans le plan ASA' . Soit $a'x'$ la demi-droite opposée. Le point h_0 est sur $a'x$ et le point h'_0 sur $a'x'$. En

outre, un calcul simple montre que $\frac{\overline{a'h_0}}{\overline{a'h'_0}} = -\operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{bSc}}{2}$, de sorte que $a'h_0$

est inférieur à $a'h'_0$. Le point h_0 se déplace sur $a'x$ et h'_0 sur $a'x'$, les deux segments $a'h_0$ et $a'h'_0$ décroissant de l'infini à zéro. L'ouverture de la

région (R) décroît donc de π à 0 quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Le problème est plus compliqué pour la région (R'). Soient u et u' les points de contact des tangentes menées de S au cercle (ϵ). Quand θ varie, ces points décrivent un cercle (Σ) de centre S et de rayon $\sqrt{Sa' \cdot S\sigma}$; la droite qui les joint passe par le conjugué harmonique i de S par rapport à σ et a' . On peut donc définir u et u' par l'intersection du cercle (Σ) et d'une sécante passant par i . Cette sécante fait avec Sa' un angle aigu dont la tangente est proportionnelle à celle de l'angle θ , ce qui permet de

suivre le déplacement de u et u' sur (Σ) quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Les

droites Su et Su' coupent $a'ax$ aux points k_0 et k'_0 dont il faut trouver

la position par rapport à h_0 et h'_0 . Ces points sont tantôt d'un même côté de a' , tantôt de côtés différents ; désignons par k'_0 le plus éloigné de a' . Ils se déplacent d'ailleurs dans le sens xx' .

θ partant de 0, la droite $u'u$ est confondue avec Sa' et les deux points k_0 , k'_0 coïncident avec a' . Si θ est voisin de 0, k_0 et k'_0 sont voisins de a' sur $a'x'$. θ croissant arrive à une valeur θ_1 telle que l'une des tangentes issues de S au cercle (s) est parallèle à $x'x$; le point k'_0 est alors rejeté à l'infini et k_0 occupe une position k_1 . θ continuant de croître, le point k'_0 qui est venu sur $a'x$ se rapproche de a' , tandis que k_0 continue à s'en éloigner.

Enfin, quand θ atteint $\frac{\pi}{2}$, k'_0 et k_0 occupent deux positions k'_2 et k_2 symétriques par rapport à a' . En résumé, quand θ croît de 0 à θ_1 la région

(R') a pour base le segment kk'_0 ; quand θ croît de θ_1 à $\frac{\pi}{2}$, cette région a pour bases les deux demi-droites k_0x' et k'_0x . Le passage par θ_1 n'introduit d'ailleurs aucune discontinuité dans la variation de (R').

Il reste à placer le couple h_0 , h'_0 , par rapport au couple k_0 , k'_0 . Quand θ croît à partir de 0, h'_0 et k'_0 se déplacent sur $a'x'$ en sens inverse, l'un venant de l'infini, l'autre y allant ; ils coïncident donc pour une valeur ω de l'angle θ , inférieure à θ_1 . Dans tout l'intervalle (0, ω) la base kk'_0 de (R') est portée par la base $h_0h'_0$ de (R) et (R') s'intègre dans (R). On trouve alors une région pour laquelle il y a quatre plans P (deux de chaque série), une région qui n'en donne aucun et deux régions bornées par les précédentes et qui fournissent deux plans de la seconde série [disposition (1)].

Un raisonnement analogue montre que h'_0 vient se confondre avec k_0 pour une valeur de ω_1 de l'intervalle $\left(\omega, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mais k'_0 peut-il se confondre avec h_0 ? Cela ne pourrait se produire que pour une valeur de θ supérieure à θ_1 . Alors $a'k'_0$ serait égal à $a'h_0$; mais à cause des inégalités $a'k'_0 > a'k_0$ et $a'h'_0 > a'h_0$, on aurait $a'k_0 < a'h'_0$. La disposition correspondante de (R) et de (R') montre que l'on n'aurait jamais plus de deux plans P ou Q, ce qui est contradictoire avec les résultats obtenus aux § II et III. Les seules valeurs ω et ω_1 conviennent donc aux changements de situations. L'étude des dispositions correspondantes de (R) et (R') montre que, dans l'intervalle (ω , ω_1) on a une région qui donne quatre plans P, une seconde qui n'en donne aucun et deux autres qui fournissent deux plans de la première série ou deux plans de la seconde [disposition (2)]. — Dans l'intervalle $\left(\omega_1, \frac{\pi}{2}\right)$, deux régions donnent quatre plans P et deux autres en donnent deux qui appartiennent soit à la première, soit à la seconde série [disposition (3)].

Il resterait à déterminer les angles ω et ω_1 en fonction des données, c'est-à-dire des angles du triangle Sbc ; le calcul des tangentes des angles

inconnus exige la résolution d'une équation du second degré assez compliquée.

Une étude analogue, lorsque b et c sont d'un même côté de a' , donne des résultats comparables aux précédents.

Enfin, l'étude des cas limites ne présente pas de difficultés sérieuses.

La cinquième et la sixième partie ont été traitées incomplètement dans les copies qui ont obtenu le premier et le second prix ; c'est dire que la dernière question n'a été résolue par personne. Les valeurs relatives des treize copies récompensées s'établissent assez exactement par les notes 20, 17,4, 11,3 et dix notes allant de 9,5 à 8. En fait, tous les concurrents qui ont traité à peu près les trois premières parties ont été cités. Si l'on ne tient pas compte de la septième question, les valeurs intrinsèques des trois premières copies sont à peu près 13,7, 11,9 et 7,7 ; celles des accessits s'échelonnent de 6,5 à 5,5.

Notons encore que neuf autres copies retenues pour une seconde lecture contiennent de bonnes solutions de la première question et, en général, des solutions incomplètes de la seconde et de la troisième. Enfin seize copies blanches se trouvent parmi les 239 soumises à l'examen du jury.

On est donc en droit de trouver décevants les résultats de ce concours.

Il n'a pas semblé opportun, dans ces conditions, de souligner des fautes vraiment trop nombreuses ; ceux des intéressés qui liront attentivement ce rapport détaillé à leur intention, se critiqueront aisément.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

E. BLUTEL.