

3. Unification des définitions de mots et des notations mathématiques

M. DESFORGE donne lecture de son rapport :

MES CHERS COLLÈGUES,

Les *Bulletins* parus depuis la dernière Assemblée générale vous ont indiqué à plusieurs reprises les questions de terminologie que nous devons étudier aujourd'hui. Bien peu nombreuses ont été les réponses reçues pour cette enquête dans le courant de l'année. Quelques suggestions et observations sont arrivées, à la dernière heure, avec les bulletins de vote ; mais, dans l'ensemble, aucune proposition essentiellement nouvelle n'est venue modifier les résultats de nos discussions antérieures. Voici, en résumé, l'état des différentes questions à l'étude.

I. DÉPLACEMENTS ET SYMÉTRIES. — Un questionnaire vous a été soumis ; il concernait les questions restant à résoudre.

40 réponses seulement ont été envoyées avant l'Assemblée générale (1). Sauf en ce qui concerne la conservation des termes « symétrie par rapport à un point » et « symétrie par rapport à une droite », en géométrie plane, conser-

(1) En tenant compte des bulletins remis le jour de l'Assemblée générale, il a été reçu 61 réponses aux questions posées dans le *Bulletin* n° 73.

Elles se répartissent ainsi et ne modifient donc pas les conclusions tirées des réponses connues avant l'Assemblée générale.

1° Y a-t-il intérêt à chercher un nom pour désigner le produit d'un déplacement et d'une symétrie par rapport à un point ou à un plan ?

30 OUI	23 NON	8 ABSTENTIONS
--------	--------	---------------

Si oui, acceptez-vous les termes « symétrie » (sans autre indication) et « figures symétriques » ?

35 OUI	7 NON	6 ABSTENTIONS
--------	-------	---------------

Si vous rejetez ces termes, lesquels proposez-vous ?

« Retournement » (1), « opposition » (1), « anticongruence » (1), « contre-égalité » (1).

2° Doit-on rejeter l'expression « symétrie par rapport à une droite » ?

25 OUI	31 NON	5 ABSTENTIONS
--------	--------	---------------

Si oui, acceptez-vous le terme « demi-tour » ?

27 OUI	13 NON	3 ABSTENTIONS
--------	--------	---------------

Si vous rejetez ce terme, lequel proposez-vous ?

« Transposition » (8), « renversement » (2), « rotation de 180° » (1).

II. — Pour la géométrie plane, acceptez-vous la terminologie suivante :

« Symétrie par rapport à un point ».

54 OUI	2 NON	5 ABSTENTIONS
--------	-------	---------------

« Symétrie par rapport à une droite ».

53 OUI	2 NON	6 ABSTENTIONS
--------	-------	---------------

« Retournement ».

27 OUI	13 NON	21 ABSTENTIONS
--------	--------	----------------

« Figures contrairement égales ».

22 OUI	22 NON	17 ABSTENTIONS
--------	--------	----------------

Autres propositions : « figures inversement égales » (5), « figures égales et de sens contraires » (2), « figures symétriques » (1), « opposition » et « figures opposées » (1).

vation acceptée par la très grosse majorité des votants, les réponses à toutes les autres questions ne permettent pas de dégager nettement une opinion.

Ainsi, pour la transformation, produit d'une symétrie par rapport à un point ou un plan et d'un déplacement, dans l'espace, j'avais cru devoir poser la question préalable : y a-t-il intérêt à chercher un nom pour désigner cette transformation ? Ce n'est pas sans surprise que j'ai constaté que sur 42 votes effectifs, 20 répondent oui, 16 non, et 6 s'abstiennent. Autant dire, si l'on peut établir une proportion valable avec un nombre aussi faible de votants, que la question paraît sans intérêt à plus de la moitié de nos collègues.

Pour le choix d'un terme propre à désigner cette transformation, 23 acceptent « symétrie » et « figures symétriques », 4 rejettent ces termes, 6 s'abstiennent. Les termes : retournement, opposition, anticongruence, sont proposés chacun par un collègue.

Pour la symétrie par rapport à une droite dans l'espace, à la question : doit-on rejeter ce terme ? 17 répondent oui, 21 répondent non, 4 s'abstiennent. Pour ceux qui acceptent un changement : 20 sont favorables à « demi-tour », 3 y sont formellement opposés et 3 s'abstiennent. Autres propositions : 3 se prononcent pour « transposition », 11 pour « renversement », 1 pour « rotation de 180° autour de... ». M. LHERMITTE suggère que l'on peut appeler « figures opposées par rapport à Δ » 2 figures qui se correspondent dans un demi-tour d'axe Δ .

Pour la géométrie plane, la très grosse majorité se prononce pour les termes « symétrie par rapport à un point » et « symétrie par rapport à une droite » (un seul refus pour le premier de ces deux termes). Or, ici, il ne s'agit pas, à proprement parler d'unification, puisque ces noms sont couramment employés depuis longtemps ; ces questions vous avaient été posées simplement pour bien préciser la différence qui existait entre le plan et l'espace.

Quant aux deux dernières questions de géométrie plane (adoption de « retournement » pour désigner le produit d'un déplacement plan et d'une symétrie par rapport à une droite du plan, et de « figures contrairement égales » pour désigner les figures qui se correspondent dans cette transformation), les réponses reçues m'ont paru assez surprenantes : 16 acceptent « retournement », 9 rejettent ce terme et 17 s'abstiennent ; pour « figures contrairement égales » : 13 oui, 14 non et 15 abstentions. Comme termes proposés : « opposition » (M. PICARDAT), « figures égales et de sens contraires », « figures symétriques », « figures inversement égales ».

Il me paraît bien difficile de dégager de cet ensemble de contradictions et d'abstentions une décision nette. Il est vrai que nous n'avons pas reçu encore toutes les réponses ; je demande donc à tous ceux d'entre vous, qui n'ont pas rempli le questionnaire joint au bulletin de vote, de vouloir bien le faire et de le remettre au Bureau au cours de cette séance. Le recensement des opinions sera signalé dans le prochain *Bulletin* ; si une majorité se dégage nettement, dans tel ou tel sens, nous considérerons la décision comme acquise. Sinon, comme la discussion paraît épuisée, le plus simple serait, à mon avis, de laisser chacun faire à sa guise et d'attendre que d'assez nombreux collègues aient constaté par expérience personnelle, l'intérêt qu'il peut y avoir à préciser ensemble notre vocabulaire.

J'ajoute, pour répondre à l'objection de certains collègues, que les questions que nous avons retenues, n'avaient aucunement pour objet de bouleverser une terminologie acquise. J'ai précisé, à plusieurs reprises, le point de vue où notre Association doit, à mon avis, se placer pour cette enquête, et les propositions

qui vous étaient faites correspondaient seulement à des cas où un choix était à faire ou bien une unification à réaliser.

Comme additif à la question des symétries, M. LHERMITTE nous demande de recommander l'expression « trièdres, ou angles polyèdres, opposés par le sommet », dont l'emploi ne paraît soulever aucune objection grave, et M. THOVERT désire que, dans les expressions « symétrie par rapport à... » les mots « par rapport à » soient remplacés par « relativement » ou bien « autour de ».

II. SIMILITUDES. — Une question voisine de la précédente est celle des similitudes, que je vous avais signalée il y a deux ans.

M. LHERMITTE nous propose d'appeler respectivement « similitude positive » et « similitude négative » les transformations produits d'un déplacement et d'une homothétie soit positive, soit négative, *dans l'espace*, et « figures positivement (ou directement) semblables », « figures négativement (ou symétriquement) semblables » les figures qui se correspondent dans ces transformations.

Ces suggestions appellent les remarques suivantes :

En géométrie plane, une similitude est le produit d'une homothétie, positive ou négative, et d'un déplacement ; le produit (T) d'une similitude plane et d'une symétrie par rapport à une droite du plan (ou encore le produit d'une homothétie plane et d'un « retournement ») n'a pas, à ma connaissance, de nom consacré par l'usage.

Dans l'espace, le mot « similitude » (« figures semblables ») est réservé d'ordinaire au produit d'une homothétie *positive* et d'un déplacement. Le produit (Θ) d'une homothétie négative et d'un déplacement, qui est aussi le produit d'une similitude (au sens ordinaire) et d'une « symétrie », n'a pas, non plus, de nom usuellement adopté.

Les questions qui se posent sont donc : Y a-t-il intérêt à donner des noms à ces transformations (T) ou (Θ) ? Dans l'affirmative, quels noms choisir ?

Il convient d'observer que, en géométrie plane, une transformation (T) est un cas particulier d'une similitude de l'espace, et aussi un cas particulier d'une transformation (Θ) de l'espace. D'autre part, une transformation (T) n'est pas le produit d'une homothétie négative *plane* et d'un déplacement plan.

Faut-il marquer ces différences entre le cas du plan et le cas de l'espace, en cherchant des noms distincts ? Y a-t-il lieu, au contraire, pour simplifier la terminologie, de rapprocher le point de vue du plan et de l'espace, en adoptant le même mot (« similitude négative », par exemple) pour désigner les transformations (T) et (Θ) ? Bien entendu, il serait alors nécessaire de donner de ce terme une définition valable pour le plan et l'espace, à savoir « produit d'une similitude (positive) et d'un retournement » (plan), et « produit d'une similitude (positive) et d'une symétrie » (espace).

Cette question est étroitement liée à celle des déplacements et symétries.

III. VECTEURS. — M. WEBER nous demande de mettre un peu d'ordre dans le vocabulaire et les notations relatifs aux vecteurs. Il propose de réserver le mot « vecteur » pour le vecteur libre et de remplacer « vecteur glissant » par « glisseur ». Reste, évidemment, le vecteur lié à son point d'application...

Pour les notations, notre collègue remarque qu'un glisseur est, au fond, l'association d'un vecteur libre $\vec{V}$ et d'une droite D parallèle au vecteur ; on pourrait donc noter un glisseur dont la ligne d'action est D : $\vec{V}_D$. L'équivalence des glisseurs pourrait alors s'exprimer par le même signe que l'équipollence des vecteurs, la présence des indices permettant d'éviter toute ambiguïté.

Notre collègue suggère qu'une notation analogue pourrait être adoptée pour

le vecteur lié ; on placerait en indice à gauche la lettre désignant le point d'application (o) du vecteur lié, d'origine o , équipollent à un vecteur libre $\vec{V}$; la notation serait ${}_o\vec{V}$.

Je vous sou mets les intéressantes propositions de notre collègue. La question est délicate, du fait que les points de vue où l'on se place dans l'étude des vecteurs et dans leur utilisation à différentes théories, sont très variés. Je me borne aujourd'hui à vous poser la question.

IV. QUESTIONS DIVERSES. — 1° M. AUNIS nous demande, à nouveau, de préciser la signification des mots « dextrorsum », « sinistrorsum », « hélice conique », « angle générateur d'un cône de révolution » et ajoute : « si personne n'a d'opinion, que le Bureau mette aux voix la suppression de ces termes ».

2° M. AUNIS reprend aussi la question de l'unification du sens du trièdre des coordonnées et ne se déclare pas convaincu par les arguments opposés l'an dernier à cette demande : « Je doute, dit-il, que la majorité des élèves de Mathématiques Élémentaires arrive jamais à se rendre compte que les raisonnements et les formules où intervient l'orientation de l'espace sont indépendants de cette orientation », et il craint que les élèves, passant d'une classe dans une autre, ne soient déroutés par des changements de figure (théorie des moments par exemple).

3° M. RAFFAELLI revient sur les observations qu'il a présentées l'an dernier à propos des angles orientés, de la notation (ox, oy), de la définition d'un vecteur. Vous préciserez tout à l'heure si vous désirez revenir sur les décisions votées par les précédentes Assemblées générales.

4° Restent quelques questions dont nous avons déjà parlé à plusieurs reprises, et pour lesquelles aucune remarque nouvelle n'a été présentée :

Adoption des termes : « homothéties positive et négative » (au lieu de directe et inverse) ;

remplacement de « axe d'un couple » par « moment (ou moment résultant) d'un couple » ;

suppression du mot « antihomologue ».

Je vous demanderai tout à l'heure de vouloir bien préciser votre attitude vis-à-vis de ces questions, en indiquant celles dont vous désirez retenir l'étude et celles pour lesquelles il vous paraît possible de prendre une décision l'an prochain.

V. QUESTIONS D'ALGÈBRE. — La seule question importante reste celle de l'emploi des termes : égalité, équivalence, identité, inéquation.

Je n'ai reçu que peu de communications à ce sujet : M. BARBOTTE, signalant un exemple tiré d'une copie d'élève, montre, une fois de plus, le danger qu'il y a à employer dans trop de sens différents le mot « équivalent ». M. RAFFAELLI nous adresse, sur ces questions, de longues et intéressantes observations où il précise, du point de vue de la logique mathématique, ses idées sur les notions de fonction, d'égalité, d'équivalence, d'identité, d'équation ; et il émet le vœu « que les mots soient employés par nous, avec leurs symboles, dans le sens que leur a donné la logique mathématique ». Dans cet ordre d'idées, notre collègue demande « que nous mettions plus d'empressement à connaître ce qui a été fait avant nous », et il ajoute : « Nous verrons alors qu'il ne nous reste plus qu'à suivre les logiciens sur la belle route qu'ils nous ont tracée. »

Sans doute, le point de vue où se place M. RAFFAELLI, procède d'une idée fort intéressante et élevée, et je le suivrais volontiers si je n'étais obligé de

ramener la discussion aux limites plus modestes et plus terre-à-terre que lui impose l'objet *précis* de notre enquête.

D'après les quelques remarques que j'ai reçues, il me semble possible de formuler un peu différemment les questions que je vous posais l'an dernier :

1° l'emploi du terme « polynômes équivalents », pour désigner deux polynômes prenant des valeurs numériques égales, pour tout système de valeurs numériques attribuées aux variables, doit-il être rejeté ?

2° les mots « fonctions égales, dans tel domaine des variables », et le signe $=$ séparant les symboles des fonctions, avec indication du domaine où la relation d'égalité est vérifiée, ne suffisent-ils pas, même au début de la théorie des polynômes, pour désigner deux fonctions prenant des valeurs égales, quelles que soient les valeurs données aux variables ?

Nous éviterons ainsi la grave objection que font les nombreux collègues qui veulent réserver aux mots « identique », « identité » leur sens strict (formés de la même manière).

M. RAFFAELLI nous signale à ce sujet que les logiciens réservent le signe $\equiv$ pour désigner l'équivalence entre propositions (en particulier, entre équations).

3° le mot « inéquation » doit-il être employé pour désigner une inégalité conditionnelle ?

Conformément à la décision prise l'année dernière par l'Assemblée générale, je m'efforce de ne traiter que les sujets qui me paraissent compris dans les limites précises de notre enquête : « unification ». Mais il se présente parfois des questions douteuses, qui se rattachent d'une façon plus ou moins lointaine à l'objet de notre étude ; il nous a paru intéressant de les signaler dans le *Bulletin*, en y ouvrant une nouvelle rubrique que M. DELCOURT a eu l'heureuse idée d'intituler : « En marge de l'unification ».

J'espère, mes chers Collègues, que cette nouvelle vous incitera à nous envoyer, plus fréquemment encore que par le passé, vos remarques sur les nombreuses questions de vocabulaire, de définitions et de notations que pose chaque jour notre enseignement. En remerciant vivement les collègues qui ont bien voulu apporter une contribution effective à cette enquête, je forme le souhait que les années prochaines voient croître sensiblement la proportion de ceux qui s'intéressent effectivement à ce travail.

Les différentes questions posées par le rapport de M. DESFORGE sont étudiées successivement par l'Assemblée :

1° *Déplacements et symétries*. — M. WEBER fait remarquer que les questions sont très délicates, et que si beaucoup de collègues se sont abstenus, c'est peut-être parce qu'ils ont aperçu toutes les difficultés logiques que soulevait l'adoption de tel ou tel vocabulaire ; en particulier, les analogies et différences entre les points de vue de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace sont très difficiles à mettre en évidence.

Après une discussion assez animée, à laquelle prennent part MM. BAROTTE, DECERF, DELCOURT, ROBY, WEBER, l'Assemblée se rallie à la proposition suivante de M. DELCOURT : étant donné que les opinions exprimées cette année ne permettent pas de prendre une décision, un prochain *Bulletin* proposera, pour ces questions, un ensemble de notations *provisoires*, qui pourront être étudiées et discutées dans le courant de l'année ; les remar-

ques et observations seront publiées dans les *Bulletins* suivants, et un vote définitif pourra être demandé l'année prochaine.

2° *Similitudes*. — La question est liée à la précédente, M. DECERF fait justement observer qu'un travail d'ensemble devrait être tenté pour l'ensemble des transformations.

L'Assemblée décide de mettre cette question à l'étude.

3° *Vecteurs*. — L'Assemblée retient également les questions posées par M. WEBER au sujet de la terminologie et des notations relatives aux vecteurs glissants et liés. Les observations seront publiées dans le *Bulletin*.

4° *Questions diverses de géométrie*. — L'Assemblée refuse de revenir sur ses décisions antérieures, relatives au symbole « angle (ox, oy) » et aux vecteurs.

Elle ne voit pas la nécessité de mettre à l'étude les questions posées par M. AUNIS, sur le sens des mots : dextrorsum, sinistrossum, hélice conique, angle générateur d'un cône.

En ce qui concerne l'unification du sens du trièdre des coordonnées, la très grosse majorité de l'Assemblée est d'avis que la question ne se pose pas et qu'il y a lieu de faire comprendre que les théories et formules sont indépendantes de la convention particulière qui définira, dans chaque problème d'application, l'orientation de l'espace.

Enfin, l'Assemblée accepte que les questions suivantes :

adoption des termes « homothétie positive » et « homothétie négative » ;

remplacement de « axe d'un couple » par « moment d'un couple » ;

suppression du mot « antihomologue »

soient posées l'année prochaine, en vue d'une décision définitive.

5° *Algèbre*. — L'Assemblée décide de laisser à l'étude les questions relatives à l'équivalence, l'égalité, l'identité, les inéquations. Les questions à résoudre seront précisées au *Bulletin* et les observations qu'elles suggéreront seront publiées.

M. GRENIER demande s'il n'y aurait pas lieu de préciser la signification des « deux points », du symbole de la théorie de la division.

M. DECERF rappelle qu'il a proposé à plusieurs reprises le remplacement du terme « pyramide régulière » (qui évoque l'idée d'un polyèdre régulier) par un terme tel que « pyramide isocèle ».

Personne ne demandant plus la parole, l'Assemblée générale renouvelle, comme les années précédentes, la résolution suivante :

L'Assemblée décide de continuer d'une façon permanente l'enquête ouverte sur la question des définitions de mots et des notations en mathématiques. Le Bureau est chargé de recueillir les communications relatives à cette enquête, de faire présenter chaque année un Rapport à l'Assemblée générale ordinaire et de lui soumettre, s'il y a lieu, un tableau des définitions de mots et des notations sur lesquelles l'entente semble pouvoir se faire. Ce tableau sera publié et l'emploi en sera conseillé.