

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1931**

La composition de mathématiques du Concours général, dans la classe de Première, a donné au Jury, cette année, des impressions d'ensemble assez neuves, curieuses, et surtout contradictoires : d'une part, un progrès marqué dans la masse des concurrents, d'autre part, un recul dans les qualités qui devraient distinguer une élite.

Les inscriptions pour cette composition étaient annoncées particulièrement nombreuses, dépassant le chiffre de 800 : à l'épreuve, la moitié seulement participait à la composition. Aussi, contrairement aux années précédentes, s'est-il rencontré peu de copies blanches, peu de compositions nulles ou franchement mauvaises : une première sélection s'était faite d'elle-même. Il y a lieu d'approuver les élèves qui s'effacent parce qu'ils

reconnaissent la supériorité de leurs camarades, et de féliciter les maîtres qui arrêtaient leurs élèves en leur épargnant une déception inutile.

Dans de nombreuses copies, même dans celles dont le bagage scientifique était léger, le Jury a eu la satisfaction de constater des efforts dans le sens de la forme, de la présentation. Les fautes d'orthographe sont moins nombreuses, et, contrairement aux précédents, nous n'éprouvons pas le besoin d'en dresser la liste, tout en ne pouvant pas cependant nous retenir de relever « un parallélogramme rencontré *toute à leur* », qu'il a fallu relire à deux fois pour en comprendre, sinon la saveur, du moins la signification. La rédaction est plus correcte et plus claire ; le langage est plus précis ; les figures sont mieux soignées. L'un des membres du Jury a même exprimé le regret de ne pouvoir récompenser certains élèves qui n'avaient traité qu'une faible partie du sujet, mais l'avaient fait en des termes irréprochables.

Opinion d'autant plus fondée et plausible que, malheureusement, les qualités que nous venons de relever disparaissent le plus souvent chez les concurrents qui, par habileté, peut-être aussi par une heureuse fortune, ont su récolter une moisson plus riche en résultats. Les 25 copies qui ont été retenues après une première lecture, et parmi elles, les 11 qui ont été récompensées s'apparentent toutes par des négligences communes. Elles traitent un assez grand nombre des parties du problème : elles ont la chance d'en traiter davantage que les camarades. Aucune n'épuise entièrement le sujet. Tel développe une partie qui a été laissée de côté par la plupart ; mais, à son tour, il a des lacunes sur d'autres points ; tous se suivent d'assez près, aucun ne s'impose à première vue ; seule, la loi des nombres et des coefficients a permis un classement, un répartition de notes allant de 14 à 12 pour les copies récompensées.

Le problème proposé (1) avait pour but l'étude générale de l'octaèdre, polyèdre quelconque, convexe ou non convexe, ayant 8 faces triangulaires, et 6 sommets, de chacun desquels partent 4 arêtes, puis, plus particulièrement, celle de l'octaèdre que nous appellerons *orthogonal* dans lequel les arêtes opposées sont orthogonales.

L'étude était préparée, dans une première partie, par celle du quadrilatère gauche $ABA'B'$; on demandait d'établir que les milieux des côtés sont sommets d'un parallélogramme, que le centre de ce parallélogramme coïncide avec le milieu du segment joignant les milieux α , β , des diagonales AA' , BB' du quadrilatère, que les qualités caractéristiques d'un quadrilatère à arêtes opposées orthogonales sont l'orthogonalité des diagonales et l'existence de la relation $\overline{\alpha\beta}^2 = \overline{\alpha A}^2 + \overline{\beta B}^2$. Toutes ces questions préliminaires, sauf le système des deux dernières conditions, pouvaient être considérées comme connues, traitées dans des exercices classiques, où elles sont énoncées plutôt à propos du tétraèdre que du quadrilatère : elles ont été généralement reconnues et bien traitées, sauf quelques réserves que nous ferons plus loin.

(1) Voir l'énoncé page 5 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1903*.

Dans une seconde partie, on définissait et on formait un octaèdre en associant au quadrilatère gauche $ABA'B'$ deux nouveaux sommets C, C' que l'on joint à ceux du quadrilatère. Les centres de gravité des 8 faces formant, disait l'énoncé, un parallélépipède. Le fait pouvait se rattacher de suite au paragraphe précédent en joignant C aux sommets du quadrilatère, on forme en effet quatre triangles dont les centres de gravité se placent sur les arêtes d'une pyramide ayant pour sommet C et pour base le parallélogramme de la première partie ; chacun d'eux se place au $1/3$ de l'arête à partir de la base ; ils sont donc les sommets de la section de la pyramide par un plan parallèle au plan de base, et forment bien un parallélogramme. Le sommet C' donne naissance, de la même manière, à un second parallélogramme dont les côtés sont respectivement parallèles et égaux à ceux du premier, et qui forme donc bien avec celui-ci un parallélépipède. Restait, demandait-on, à placer le centre G de ce parallélépipède. Revenant, à cet effet, à la génération précédente, ce centre G est au milieu du segment qui joint les centres I, I' des deux parallélogrammes ; or, I, I' , sont placés à leur tour sur les droites joignant C, C' au centre J du parallélogramme formé par les milieux des côtés de $ABA'B'$, et au $1/3$ de ces droites à partir de J ; G est donc situé sur $J\gamma$, γ étant le milieu de CC' , au $1/3$ à partir de J , et par conséquent, se confond avec le centre de gravité de $\alpha\beta\gamma$, puisque d'après le § 1, J est le milieu de $\alpha\beta$. C'est bien ce qu'annonçait le texte. Incidemment, le parallélépipède a 4 arêtes parallèles et égales à II' , et II' , d'après ce qui précède, est parallèle à la diagonale CC' de l'octaèdre et égal au $1/3$ de celle-ci : on rattache ainsi la direction et la grandeur des arêtes du parallélépipède à celles des diagonales de l'octaèdre.

La dernière partie concernait l'octaèdre orthogonal. Cet octaèdre étant constitué par quatre quadrilatères $ABA'B', BCB'C', CAC'A'$, on peut le caractériser par les qualités établies dans la 1^{re} partie, soit donc par l'orthogonalité deux à deux de ses diagonales AA', BB', CC' et les relations $\overline{\alpha\beta}^2 = \overline{\alpha A}^2 + \overline{\beta B}^2$, $\overline{\beta\gamma}^2 = \overline{\beta B}^2 + \overline{\gamma C}^2$, $\overline{\gamma\alpha}^2 = \overline{\gamma C}^2 + \overline{\alpha A}^2$. Suivant les indications du texte, ces trois relations montrent d'abord que, avec le triangle $\alpha\beta\gamma$ comme base, on peut toujours construire un tétraèdre $O\alpha\beta\gamma$ dont les arêtes latérales sont respectivement égales à $\alpha A, \beta B, \gamma C$, et que, dans ce tétraèdre le trièdre de sommet O est trirectangle. Cela étant, si le quadrilatère orthogonal $ABA'B'$ reste fixe, C et C' variant de façon que l'octaèdre reste orthogonal, le triangle rectangle $O\alpha\beta$ a une hypoténuse fixe et des côtés de grandeur invariable : il se déplace en tournant autour de son hypoténuse, et son sommet O décrit un cercle Σ dont le plan reste perpendiculaire à $\alpha\beta$, et dont le centre ω est sur cette droite $\alpha\beta$; la droite $O\gamma$, perpendiculaire au plan $O\alpha\beta$, est tangente à ce cercle, de sorte que γ reste dans le plan de ce cercle et décrit non pas ce plan tout entier, mais la partie extérieure au cercle Σ . Veut-on construire une position des sommets C, C' ? on pourra, comme le proposait le texte, choisir arbitrairement la position de la diagonale CC' , parmi les droites

parallèles entre elles, orthogonales à AA' et BB' , prendre l'intersection γ de cette droite avec le plan du cercle Σ , mener de γ , sous la seule condition que ce soit possible, une tangente γO à ce cercle, et enfin porter sur la droite choisie, de part et d'autre de γ , des longueurs γC , $\gamma C'$ égales à γO . Se donne-t-on, non plus la position de CC' , mais sa longueur l ? c'est se donner la longueur $\frac{l}{2}$ de γO , de sorte que γ a un lieu, qui consiste en un cercle S , concentrique à Σ , et que, de même, C, C' ont pour lieux des cercles, S_1, S'_1 , déduits de S par translation égale à $\frac{l}{2}$ et parallèle à la direction invariable de CC' . Si l'on fait varier l , les centres de S_1 et S'_1 décrivent la parallèle à cette direction issue de ω , centre de Σ , et, des cercles variables S_1, S'_1 égaux au cercle décrit par γ , il en est un de rayon minimum, qui correspond à la valeur nulle de l , et qui se confond avec Σ .

On proposait aussi de placer C dans un plan Q parallèle à AA' et BB' , en annonçant que son lieu était alors un cercle ayant son centre sur $\alpha\beta$. C'était suggérer le calcul de CU , distance de C au point U , intersection de Q et $\alpha\beta$; calcul facile, résultant d'applications successives du théorème de Pythagore et de la perpendicularité entre droite et plan, γC et Q , ωU et plan de Σ , qui donne successivement :

$\overline{CU}^2 = \overline{U\gamma}^2 - \overline{\gamma C}^2 = \overline{U\gamma}^2 - \overline{\gamma O}^2 = \overline{U\omega}^2 + \overline{\omega\gamma}^2 - \overline{\gamma O}^2 = \overline{U\omega}^2 + \overline{R}^2$, R étant le rayon de Σ . Cette expression est constante et C décrit bien, dans le plan Q , un cercle S_2 , lequel, lorsque varie le plan Q , a un centre décrivant la droite $\alpha\beta$ et un rayon minimum correspondant à $U\omega$ nul, soit au plan Q mené par ω . Les deux cercles S_1, S_2 , annonce-t-on enfin, sont sur une même sphère. En effet, l'axe de chacun d'eux est parallèle à la ligne décrite par le centre de l'autre ; axes et lieux des centres forment ainsi un parallélogramme ; les axes se coupent et leur point d'intersection est à des distances égales d'un point quelconque pris soit sur S_1 , soit sur S_2 , les carrés de ces distances étant respectivement $\overline{U\omega}^2 + \overline{\omega\gamma}^2 = \overline{U\gamma}^2$ et $\overline{\gamma C}^2 + \overline{CU}^2 = \overline{U\gamma}^2$.

Telle était, sauf quelques digressions que nous signalerons, l'étude demandée ; telles étaient, parmi d'autres, également naturelles, également bonnes, les réponses aux diverses questions posées, réponses conformes aux suggestions du texte, accessibles à nos élèves de Première. Comment se fait-il que ces réponses, que nous estimons simples et naturelles, ne soient pas venues facilement sous la plume de bons élèves ? C'est d'abord, et comme nous le répétons chaque année, que le bon élève croit se faire apprécier en montrant quelles sont ses connaissances : c'est qu'il écoute volontiers ses souvenirs plutôt que les indications, qu'il a plus confiance en sa mémoire qu'en son intelligence.

Dès la première partie, cet élève reconnaît une question qu'il a traitée, celle du tétraèdre orthogonal : il y répond par la méthode qu'il a apprise, en ramenant la question, par une projection, à celle de l'ortho-

centre d'un triangle ; il ne s'aperçoit pas que le texte lui met dans les mains une autre méthode, que, avec ce qu'il vient d'établir, la réponse tient en une ligne ; il a déjà constaté l'existence de trois parallélogrammes ayant deux à deux une diagonale commune ; il a eu à dire dans quels cas ces parallélogrammes sont des rectangles ; il n'aurait plus qu'à ajouter que lorsque deux de ces diagonales sont égales à la troisième, elles sont égales entre elles. Mais il procède autrement ; il s'inspire de considérations extérieures ; il croit se montrer habile, alors qu'il sort du sujet, qu'il n'en perçoit plus les caractères. Il récidive dans la dernière partie. Ici, les relations qu'il a sous les yeux, qui viennent du théorème de Pythagore, lui rappellent des lieux connus ; il retrouve le lieu d'un point γ défini par la différence des carrés de ses distances à deux points fixes α, β ; il ne constate pas que, dans les opérations qu'il vient de faire, dans la construction des points O et γ , il a la solution immédiate ; en faisant inutilement appel à sa mémoire, il n'a pas la solution la plus simple ; bien pis, il n'a pas la solution complète, il ne voit pas que γ , se plaçant sur une tangente au cercle Σ , ne décrit que la portion du plan extérieure à ce cercle ; il ne récolte pas enfin les ressources qui lui permettraient d'aboutir dans les recherches suivantes.

Ce défaut s'apparente avec le manque de souci d'une observation complète. Il suffit de pressentir un résultat pour se croire autorisé à l'affirmer. A propos du lieu de O , on s'aperçoit que le triangle $O\alpha\beta$ est rectangle en O ; vite, on en conclut à la sphère de diamètre $\alpha\beta$; mais si on observe ainsi que α et β sont fixes, on ne voit pas que les longueurs $O\alpha$, $O\beta$, égales à αA , βB , quoique de position variable, restent constantes. Dans une partie intercalaire, les sommets A, B, C, A' de l'octaèdre étant donnés, il fallait placer les deux autres B', C' , et trouver leurs lieux, de façon que le parallélépipède correspondant soit rectangle ou soit un cube. On trouve bien les deux lieux, qui sont, dans le premier cas, deux plans parallèles, menés respectivement par B et C , perpendiculairement à AA' , et, dans le second cas, deux cercles égaux de rayon égal à AA' , de centres B et C , et placés dans les deux plans précédents ; mais on n'observe pas que B' et C' doivent être choisis sur leurs lieux respectifs, non pas tous deux arbitrairement, mais de façon que BB' et CC' soient rectangulaires. On cherche alors les positions demandées, correspondant au maximum et au minimum de la longueur $B'C'$, sans tenir compte de cette restriction. A ceux, trop rares, qui ont évité le piège, indiquons que la solution apparaissait, non pas en s'attaquant à des calculs compliqués, non pas avec un recours prématuré, inutile, à la Trigonométrie, ainsi qu'il y en a eu un exemple, mais en observant simplement qu'il s'agit, en projetant sur le plan de l'un des deux cercles, du troisième côté d'un triangle dont les deux autres ont des longueurs constantes, l'un étant égal et parallèle à la distance des centres, l'autre égal à la corde du quadrant, et que les extrema sont donc atteints lorsque ces deux côtés ont la même direction, le maximum quand ils s'ajoutent, le minimum quand ils se retranchent.

Certaines questions avaient été précisément choisies en vue d'éveiller ce sens de l'observation. C'est ainsi qu'il était demandé, connaissant le parallélépipède, de construire l'octaèdre, connaissant ou bien l'un de ses côtés, ou bien l'une de ses diagonales. L'intention était de faire réfléchir sur le nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour définir l'octaèdre. Avec un côté, la construction est possible et d'une seule manière ; avec une diagonale, elle ne l'est que si cette diagonale remplit certaine condition, d'être parallèle et de même sens à certaines arêtes du parallélépipède, et égale à trois fois chacune d'elles ; de plus, quand il en est ainsi, la construction est possible d'une infinité de manières, la donnée équivalant à celle d'un sommet seulement. Autrement dit, un sommet ne suffit pas, deux suffisent, à condition qu'ils ne soient pas opposés, pour définir l'octaèdre. De plus, en ce dernier cas, il ne suffit pas, pour justifier la conclusion, de construire, d'une manière unique, les divers sommets inconnus de l'octaèdre, ce qui a été fait correctement, par des procédés variés ; mais, et ceci a été omis par tous, il fallait en outre observer que, à l'octaèdre ainsi construit, répondait bien le parallélépipède donné.

L'absence de précision, l'observation incomplète d'un fait se constatent même à propos de notions classiques courantes. Quand il s'agit de parler du centre du parallélépipède, tels candidats prennent deux sommets, puis le milieu de la droite qui les joint. Pourquoi ces deux sommets, plutôt que deux autres ? Sans doute, parce que ce sont ceux avec lesquels la démonstration aboutit. De même, dès la 1^{re} partie, sur la notion élémentaire de parallélogramme, l'existence d'un parallélogramme se mettait en évidence, soit par la présence de côtés deux à deux parallèles, soit par celle de deux côtés égaux et parallèles. C'est la seconde démonstration qui a été présentée par la plupart ; mais, et ceci mérite vraiment d'être souligné, nul ne fait allusion au sens des côtés ; chacun se contente de dire que PQ et RS sont égaux et parallèles ; aucun n'ajoute pourquoi c'est PQSR, plutôt que PQRS qui est un parallélogramme.

Comparaison et conclusion décevantes ; d'une part des sujets qui annoncent des qualités d'ordre, d'élégance, mais dont les compositions, trop légères, ne peuvent prétendre au succès ; d'autre part, des camarades plus habiles, qui touchent à tout en glissant, et acquièrent ainsi un bagage pesant plus lourd dans la balance. La critique est facile, dira-t-on : c'est vrai, et, pour être juste, nous nous en réserverons une part en constatant que le texte, en exploitant une facile et riche matière, était peut-être trop copieux, même pour de bons élèves, si ce n'est pour l'élite. Arrêtons-nous sur les progrès constatés, et félicitons les maîtres d'une élévation sensible dans le niveau moyen de leurs élèves. Espérons que ces progrès se maintiendront, qu'ils se développeront, et que, dans l'avenir, les qualités de fond et de forme, de savoir et d'intelligence, aujourd'hui dissociées, se trouveront réunies dans une complète harmonie.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

A. TRESSE.
