

**3. Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1931**

Une ellipse a deux séries de cercles focaux. L'étude de ceux qui sont centrés sur l'axe focal de cette courbe est l'objet du problème proposé aux concurrents (1). Suivant la règle, ceux-ci ne devaient utiliser que les connaissances d'un bon élève de la classe de Mathématiques. En particulier, il est légitime de faire appel à l'équation réduite de l'ellipse et aux conséquences immédiates de cette équation. Notamment un cylindre qui a pour section droite une ellipse ou pour base un cercle est coupé suivant une ellipse, un cercle ou deux droites parallèles par tout plan perpendiculaire à un plan de symétrie de la surface. Si le plan sécant a une direction quelconque, il est plus délicat d'établir un résultat qui ne paraît d'ailleurs ignoré de personne : il ne semble pas qu'aucun candidat y ait vu quelque difficulté.

Une sphère S , de centre O , étant donnée, ainsi qu'un cylindre σ circonscrit à cette sphère le long d'un grand cercle Σ , on sait qu'une section Σ déterminée sur ce cylindre par un plan oblique P , est une ellipse dont l'axe focal est l'intersection de ce plan et du plan de symétrie Π de σ , perpendiculaire à P . Pour faciliter le langage, supposons le plan P horizontal. Soient F_1 et F'_1 les extrémités du diamètre vertical de S . Les projections obliques de F_1 et F'_1 , sur le plan P , parallèlement à la direction D des génératrices de σ , sont les foyers F et F' de Σ .

(1) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1931*.

Les parallèles (sections horizontales) de S se projettent de même, sur P , suivant une famille de cercles Γ dont la position, relativement à Σ , apparaît de suite. Ces parallèles se classent en deux catégories. Les uns coupent Σ_1 en deux points et donnent des cercles Γ bitangents à Σ ; les cercles Γ , projections obliques des autres parallèles, sont à l'intérieur de Σ . Deux parallèles limites, tangents à Σ_1 , l'un au point le plus haut, l'autre au point le plus bas de ce cercle, se projettent suivant les cercles osculateurs à Σ en l'un ou l'autre des sommets A, A' , de cette ellipse. On suit sans difficulté la déformation et le déplacement de Γ quand le plan P_1 du parallèle associé descend du point le plus haut F_1 de la sphère au point le plus bas F'_1 .

Ces cercles Γ constituent une des familles de cercles focaux dont on désirait l'étude. Avant de poursuivre, il est bon de remarquer que les longueurs des demi-axes de Σ étant égales respectivement au rayon R de

S et à $\frac{R}{\sin \alpha}$ (α désignant l'angle de D et du plan P), cette ellipse Σ est la plus générale.

Deux cercles C et C' donnés, dans le plan P , ne suffisent pas à définir une famille de cercles focaux. On s'en assure en imprimant à chacun d'eux une translation parallèle à une direction D , choisie de telle sorte que leurs positions nouvelles C_1 et C'_1 soient sur une sphère S . Il est nécessaire et suffisant que D soit parallèle au plan de symétrie Π des deux cercles donnés.

La grandeur de S dépend de l'angle arbitraire α de D et du plan P ; la famille des cercles Γ en dépend également. L'étude de cette liaison est l'objet de la première partie du problème.

Le rayon R de S est celui du cercle circonscrit à un trapèze isocèle dont les bases sont respectivement égales aux diamètres $2r$ et $2r'$ des cercles C, C' , et dont la hauteur vaut $d \operatorname{tg} \alpha$, d désignant la distance des centres de C et C' . R^2 s'exprime par une fonction linéaire, à coefficients positifs, de $d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ et de son inverse. La valeur minima de R est le plus grand des deux rayons r, r' , et la valeur correspondante de $d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ est $|r^2 - r'^2|$. La géométrie rend ces résultats intuitifs.

L'angle α étant fixé, la famille des cercles Γ est définie. Il y a lieu de chercher ceux de ces cercles qui passent par un point M ou qui sont tangents à une droite Δ , dans le plan P . Cette recherche et la discussion correspondante constituent la seconde partie du problème; la solution est immédiate.

Les parallèles projetés obliquement, suivant des cercles Γ qui passent par M , sont menés par les points où S est percée par la projetante oblique de M . Il y en a deux, un ou zéro, suivant que M est à l'intérieur de Σ , sur Σ ou en dehors de cette courbe qui joue le rôle de séparatrice.

Supposons que la projetante oblique du point M rencontre S en deux points M_1 et M'_1 ; ces deux points sont symétriques par rapport au plan U de Σ_1 . Les plans P_1, P'_1 des parallèles qui passent par ces points coupent U suivant deux droites δ_1, δ'_1 , perpendiculaires à Π . Le plan mené par

$M_1M'_1$, perpendiculaire à U , coupe ce dernier suivant une droite équidistante de δ_1 et δ'_1 . Une projection oblique, sur le plan P , associée aux cercles Γ et Γ' deux droites δ , δ' perpendiculaires à FF' . La droite équidistante de δ et δ' , menée par M , est donc l'axe radical de ces cercles. Ainsi l'axe radical de deux cercles focaux sécants est la droite équidistante des droites δ et δ' , associées à ces cercles suivant le procédé indiqué.

La droite Δ et un cercle Γ qui lui est tangent sont les projections obliques d'un parallèle Γ_1 de S et de la tangente Δ_1 à ce parallèle, qui a même direction que Δ . Le plan $\Delta\Delta_1$ coupe S suivant un cercle L ; les parallèles passant par le point le plus haut ou le point le plus bas de L , se projettent obliquement suivant des cercles Γ tangents à Δ . Il y en a deux, un ou zéro, suivant que le plan mené par Δ coupe S , lui est tangent ou ne la coupe pas, c'est-à-dire suivant que Δ coupe Σ , lui est tangente ou ne la coupe pas. Si Δ coupe Σ en deux points N et N' , cette droite est tangente à deux cercles focaux Γ et Γ' en M ou en M' . Le segment MM' est à l'intérieur du segment NN' et leurs milieux coïncident avec la projection oblique du centre de L . Il en résulte que l'axe radical de deux cercles focaux passe par les milieux des cordes interceptées par l'ellipse sur les tangentes communes à ces cercles.

Dans le cas particulier où la droite Δ passe par un foyer F de Σ , l'un des cercles focaux tangents à cette droite est réduit au point F . Soit G le point où l'autre touche Δ ; le milieu I de FG n'est autre que le milieu de la corde Δ de l'ellipse. On sait que le lieu de ce point est une ellipse homothétique de Σ , deux sommets de cette ellipse étant F et le centre de Σ . Il en résulte que le lieu du point G est une ellipse de sommets F, F' homothétique et concentrique à Σ , le rapport d'homothétie étant l'excentricité de cette dernière. Cette proposition, qui n'était pas signalée dans la seconde partie, en est une conséquence toute naturelle ; elle se retrouvera dans la dernière.

La même propriété incite à chercher le lieu des points des cercles focaux, où la tangente a une direction λ arbitraire, mais fixe. Sur toute sécante NN' à l'ellipse Σ , ayant cette direction, se trouvent deux tels points M, M' , et le milieu de MM' est celui de NN' . Le lieu des points M, M' , est donc une courbe qui a pour diamètre des cordes de direction λ le diamètre conjugué A de cette même direction dans l'ellipse, et qui passe par les foyers F et F' . On est amené à penser que ce lieu est une ellipse passant par les foyers de Σ et qui est tangente à celle-ci aux extrémités de A . C'est précisément l'objet de la cinquième partie.

Prenons, comme plan P , le plan P_1 d'un parallèle Γ_1 . Soient N_1 un point quelconque du cercle Σ_1 , n le point où la génératrice N_1n du cylindre σ perce P_1 . Les tangentes à S issues du point n ont toutes même longueur : l'une d'elles nN_1 est égale à l'une nm des tangentes menées de ce point au parallèle Γ_1 . Soit h le point où le plan parallèle à Π , mené par nN_1 , coupe la droite δ_1 , intersection du plan P_1 et du plan U . Le triangle nN_1h est rectangle en N_1 et l'angle $\widehat{N_1nh}$ est égal à α , de sorte que $\frac{nm}{nh}$

vaut $\cos z$. Projétons obliquement sur le plan P primitif. Soient δ , M , N , H les projections de δ_1 , m , n , h . Le rapport $\frac{NM}{NH}$ égal au précédent vaut donc $\cos z$.

Ainsi, à tout cercle focal Γ on peut associer une droite δ (déjà rencontrée) telle que le rapport des distances tangentielle d'une part, normale d'autre part, d'un point quelconque M de l'ellipse Σ , au cercle Γ et à la droite δ , soit constant. Cette droite δ n'est autre que la corde des contacts de Γ et de Σ , quand ces contacts existent. Si l'on prend comme cercle Γ un foyer F de Σ , on retrouve une propriété classique, la droite δ correspondante n'étant autre que la directrice relative à ce foyer. Le déplacement de δ est facile à suivre avec celui de δ_1 . La droite δ est située entre les deux directrices de Σ . Inversement, toute perpendiculaire à FF' , placée entre les directrices, est une droite δ et il lui correspond un cercle Γ . On peut dire que δ est la directrice associée au cercle Γ .

Ces propriétés sont à l'origine de la dénomination des cercles focaux ; elles sont visées, ainsi que leurs proches conséquences, dans la troisième partie du problème.

Considérons deux cercles focaux Γ et Γ' et les directrices associées δ et δ' . Les distances tangentielles NM et NM' d'un point quelconque N de Σ , aux cercles Γ et Γ' , sont proportionnelles aux distances normales NH et NH' du même point à δ et δ' . Comme HH' est constante, on conclut à l'invariabilité de la somme ou de la différence de NM et NM' , suivant que N est entre δ et δ' ou dans l'une des régions extérieures à ces droites. Une discussion facile montre l'existence de quatre cas principaux : leur discrimination est liée à celles des points où Σ peut être rencontrée par δ et δ' .

Soit NN' une corde de Σ . On a vu que deux cercles focaux lui sont tangents, l'un en M , l'autre en M' , et que le milieu de MM' est aussi celui de NN' . On en déduit que les deux points N et N' sont à égale distance l'un de δ , l'autre de δ' , et par suite que le milieu commun est équidistant de δ et δ' . Dans ce cas encore, l'axe radical de Γ et Γ' est la droite équidistante de δ et δ' .

Soit J un point où l'axe radical de Γ et Γ' coupe Σ . Les tangentes menées de J aux deux cercles, ayant même longueur, ce point est équidistant de δ et δ' ; on retrouve, pour la troisième fois, ce résultat : l'axe radical de deux cercles focaux est la droite équidistante des directrices relatives à ces cercles.

Les raisonnements utilisés sont en défaut si les cercles focaux ne sont pas sécants, ou s'ils n'ont pas de tangente commune, ou si leur axe radical ne coupe pas Σ . L'étude proposée dans la quatrième partie du problème permet de supprimer ces restrictions.

Le plan U est un plan de symétrie pour la sphère S et pour tout cylindre dont les génératrices sont parallèles à D . En particulier, le cylindre γ qui projette obliquement le parallèle Γ_1 suivant le cercle focal Γ , passe par le cercle Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport au plan U . Les deux cercles Γ_1 et Γ_2 constituent l'intersection complète de γ et de S . Ainsi, les cercles

focaux sont aussi les projections obliques de cercles Γ_2 dont les plans sont également parallèles.

Par un point Q quelconque, on peut mener des plans parallèles respectivement à ceux de Γ_1 , Γ_2 , Σ_1 . Les deux premiers plans coupent le cylindre γ suivant deux cercles symétriques par rapport au troisième. Ces cercles sont sur une sphère et la puissance de Q , par rapport à cette sphère, peut être regardée comme la puissance du point par rapport au cylindre. Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cylindres γ , γ' , dans un plan horizontal, est l'axe radical des cercles découpés par ce plan sur les deux cylindres. Il en résulte que le lieu des points d'égale puissance, par rapport aux deux cylindres, est un plan perpendiculaire à l'intersection or de Π et de U . C'est le plan radical de γ et γ' . Sa trace, sur le plan P , est l'axe radical de Γ et Γ' . La détermination de ce plan est facile. La sphère S coupe γ suivant deux cercles Γ_1 et Γ_2 : elle coupe γ' suivant deux cercles Γ'_1 et Γ'_2 . Les plans de ces quatre cercles sont perpendiculaires à Π et leurs traces, sur ce dernier plan, sont symétriques deux à deux par rapport à or . Ces traces portent les côtés d'un losange dont deux sommets sont les points d_1 et d'_1 où δ et δ' coupent or : les deux autres sommets e , e' sont donc symétriques par rapport à or et sont sur la médiatrice du segment $d_1 d'_1$. Comme e et e' ont chacun même puissance par rapport aux deux cylindres, la droite ee' est la trace du plan radical cherché sur le plan Π : ce plan radical est équidistant des plans qui projettent obliquement δ_1 et δ'_1 et sa trace, sur le plan P , est équidistante des deux directrices δ et δ' .

Cette propriété est un cas particulier d'une autre relative aux cordes communes à deux coniques qui sont bitangentes à une troisième : un tel rapprochement n'était pas demandé.

La question posée dans la cinquième partie a déjà été amorcée dans l'examen de la seconde. Une étude directe va permettre d'en compléter la solution.

Les tangentes aux cercles Γ , parallèles à une direction λ , donnée dans le plan P , sont les projections obliques de tangentes aux parallèles Γ_1 correspondants. Ces dernières tangentes engendrent un cylindre circonscrit à S le long d'un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à λ . Ce grand cercle passe par F_1 et F'_1 et rencontre le grand cercle Σ_1 en deux points τ_1 , τ'_1 , diamétralement opposés. Le lieu cherché est la projection oblique de ce grand cercle sur le plan P . C'est une ellipse qui passe par F et F' et qui est tangente à Σ aux points τ et τ' . Réciproquement, à toute ellipse remplissant ces conditions correspond une direction λ : le plan mené par $\tau\tau'$, parallèlement à D , coupe Σ_1 aux points τ_1 , τ'_1 et le plan du grand cercle, perpendiculaire à λ , est déterminé par les points F_1 , τ_1 , τ'_1 .

La sixième et dernière partie posait deux questions. L'une a déjà été traitée comme conséquence de propriétés rencontrées dans la seconde partie, mais non visées dans l'énoncé : aussi est-il bon d'en reprendre l'examen.

Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un foyer F de Σ

aux cercles focaux Γ est le lieu des points G, G' , où chacun de ces cercles est coupé par la polaire correspondante du point F . La droite GG' est la projection oblique d'une droite $G_1 G'_1$ du plan P_1 . Soient g_1 la trace de cette droite et s celle de S , sur le plan Π , φ_1 la trace de FF_1 sur P_1 . Les deux points φ_1 et g_1 sont conjugués harmoniques par rapport aux points a_1, b_1 où la droite $\varphi_1 g_1$ rencontre s . Soit encore K le point, autre que F_1 , où FF_1 perce S . Les deux droites rectangulaires KF_1, KF'_1 sont les bissectrices des droites Ka_1, Kb_1 . Par suite Kg_1 coïncide avec KF'_1 . Le lieu de G_1, G'_1 est donc l'intersection de S et du plan perpendiculaire à Π , mené par KF'_1 . Or ce plan est perpendiculaire à FF_1 et par suite parallèle à U . Il coupe S suivant un petit cercle dont la projection oblique, sur le plan P , est une ellipse homothétique et concentrique à Σ . Le grand axe de cette ellipse est $F_1 F'_1$.

La deuxième question n'est que la reproduction d'une question posée lors d'un concours antérieur et qui n'avait pas été résolue ; elle vise d'ailleurs une famille de cercles focaux dont la définition géométrique est différente. Aussi les concurrents qui se sont bornés à invoquer ce précédent ont-ils fourni une caution insuffisante.

Il s'agit de déterminer le lieu des points communs à deux cercles Γ orthogonaux. Un point M situé sur deux cercles Γ est la projection oblique de deux points M_1 et M'_1 de S . Soient Γ_1 et Γ'_1 les parallèles passant par ces points, r et r' leurs rayons, μ la distance de leurs plans. Les deux cercles focaux Γ, Γ' qui en sont les projections obliques ont les mêmes rayons ; mais la distance de leurs centres est $\mu \cotg \alpha$ ce qui conduit à la relation $r^2 + r'^2 = \mu^2 \cotg^2 \alpha$. Les deux points M_1 et M'_1 sont symétriques par rapport à U et la distance de chacun d'eux à ce plan est $\frac{\mu}{2 \sin \alpha}$.

L'emploi de trois plans de coordonnées rectangulaires, et parmi eux U et Π , l'origine étant en O , est alors indiqué. L'intersection de U et Π est ox ; les deux autres axes sont oy , parallèle à D , oz perpendiculaire à Π . Un calcul facile, partant de la condition d'orthogonalité, montre que la projection orthogonale du lieu des points M_1 et M'_1 , sur le plan Π , a pour équation $x^2 \cos^2 \alpha + y^2 (1 + \cos^2 \alpha) = R^2$. Cette projection est une ellipse qui passe par les points F_1 et F'_1 et par les symétriques de ces points par rapport à ox . La partie utile se compose des deux arcs de cette ellipse situés à l'intérieur de s .

A l'aide de la relation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, on trouve aisément l'équation de la projection orthogonale du lieu, sur le plan U ; c'est :

$$x^2 + z^2 (1 + \cos^2 \alpha) = R^2 \cos^2 \alpha$$

Cette projection est une ellipse située à l'intérieur de Σ_1 : c'est la base d'un cylindre droit, qui est à l'intérieur de σ et qui passe par les projetantes FF_1 et $F'F'_1$. Le lieu cherché, dans le plan P , est donc une ellipse qui a pour sommets F et F' et qui est à l'intérieur de Σ .

Il semblait que la simplicité des deux premières parties les rendit abordables à tous les concurrents. Or 17 ont remis une copie blanche et renoncé à se faire juger.

35 se sont arrêtés à la première partie et 67 à la seconde. Parmi eux, un tout petit nombre ont laissé soupçonner quelque valeur et justifié la confiance du maître qui les avait élus pour participer à l'épreuve. C'est dans les 102 copies de ce lot que se rencontrent les fautes les plus graves. On est toujours surpris que l'homogénéité des formules ne soit pas mieux respectée ; cette critique s'adresse d'ailleurs à des niveaux plus élevés, puisque l'une des 13 copies primées n'y échappe pas. A quoi pensaient ceux qui ont écrit :

$$(r^2 - r'^2)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{r^2 - r'^2} (r^2 + r'^2) + \frac{r^2 - r'^2}{3}, \quad r^4 + r'^4 - 2rr',$$

$$5 \frac{d}{2} (r^2 - r'^2) + r'^2, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + 1}, \quad r = \sqrt{2(r^2 - r'^2) \cdot 2r^2},$$

$$R = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r'^2}}, \quad R = \frac{1}{4} \sqrt{(1 + d^2)(r^2 - r'^2) + 2}, \quad \arctg \pm \sqrt{r^2 - r'^2}, \text{ etc.}$$

(Tous ces exemples sont pris dans des copies différentes). Le trouble inspiré par la crainte du résultat ne peut être invoqué ici. On est toujours ramené à la même explication : l'élève absorbé par le mécanisme du calcul perd de vue la signification des symboles qu'il emploie ; la culture n'y trouve guère son compte !

L'étude du minimum de R a donné lieu, le plus souvent, à des calculs pénibles, compliqués encore par l'emploi des dérivées. Certains candidats ayant mis R^2 sous la forme $r^2 + f^2(\operatorname{tg}^2 \alpha)$, n'ont pas su en tirer parti pour constater que le minimum de R est r , à condition que $f(\operatorname{tg}^2 \alpha)$ puisse s'annuler, ce qui est le cas, en vertu de l'hypothèse $r \geq r'$. Quelques-uns ayant prévu ce minimum, par des considérations géométriques, se sont servi de leur formule pour déterminer la valeur correspondante de $\operatorname{tg}^2 \alpha$, laissant supposer que le secours de la géométrie est indispensable. Mais il faut réserver une mention spéciale à celui qui, ayant exprimé aussi R^2 sous la forme $r'^2 + g^2(\operatorname{tg}^2 \alpha)$, a dit que le minimum de R est r' !

Un assez grand nombre ont cru devoir faire varier α de 0 à π et donner à $\operatorname{tg} \alpha$ des valeurs négatives ; c'est bien inutile.

Dans 67 copies, on trouve des essais relatifs à la troisième partie : 19 des 20 copies retenues après une première correction sont du nombre. Ces essais sont assez souvent heureux, mais incomplets. La géométrie analytique n'y est pas trop mise à contribution. L'invariabilité de la somme ou de la différence des longueurs des tangentes menées d'un point de Σ à deux cercles focaux n'a été établie que dans quelques copies.

Les tentatives provoquées par la quatrième partie sont nombreuses : bien peu ont abouti complètement et la propriété relative aux droites δ, δ' et à l'axe radical des deux cercles focaux associés à ces droites a échappé à la plupart des candidats. Cette propriété s'est pourtant imposée, à quatre reprises, dans cette étude où la vision d'un but préconçu n'a joué aucun rôle.

Les essais visant la cinquième partie sont à peine moins nombreux que

ceux qui touchent la précédente ; l'indépendance, avec la troisième et la quatrième partie, suffit à l'expliquer. Cette fois encore, beaucoup de tentatives heureuses, mais incomplètes ; personne n'a signalé la difficulté relative à la section d'un cylindre oblique, de base circulaire, par un plan quelconque.

La sixième partie a été abordée dans une trentaine de copies, dont la moitié de celles qui ont été soumises au classement définitif. La première question a été traitée dans quelques-unes, de façon fort élégante parfois. Mais, dans la plupart, ce ne sont que des essais informes ; en particulier, la seconde question n'est-elle esquissée que dans la copie classée au premier rang.

Cette copie, sauf les réserves précédentes, contient à peu près tous les résultats mentionnés ou visés dans l'énoncé. La forme constructive de l'exposition est facile à saisir ; la langue est correcte, précise, très claire, agréable souvent. C'est une œuvre intéressante, qui fait grand honneur à l'auteur.

On pourrait en dire presque autant de la copie qui a obtenu le deuxième prix. Une chute assez sérieuse en passant au troisième.

Sans exagérer la portée de notes qui dépendent essentiellement des coefficients attribués à chaque partie du problème, on aura une idée assez nette de la valeur relative des 13 copies récompensées en se reportant à l'échelle suivante : 14,3 ; 13,5 ; 10,9 ; 10,2 (2 copies) ; 10 (id.) ; 9,3 ; 9,1 (3 copies) ; 8,6 (2 copies).

Les 7 copies écartées, lors du classement définitif, ont des moyennes peu différentes et celle de la dernière est encore 8. C'est dire que la liste des récompenses aurait pu être allongée si le règlement du concours l'avait permis. Le Jury a surtout regretté de ne pouvoir prononcer un quatorzième nom. Les efforts dont il a trouvé des preuves dans près de la moitié des copies, témoignent de l'intérêt que trouvent les concurrents à l'étude de certaines formes de la géométrie.

L'Inspecteur général, Président du Jury.
E. BLUTEL.