

DEUXIÈME PARTIE

Sur l'application des dérivées à l'étude de la variation des fonctions

Les théorèmes en vertu desquels on déduit le sens de variation d'une fonction du signe de sa dérivée sont démontrés, en général, dans les livres par application du théorème des accroissements finis. Cette voie est assez détournée, et on est conduit, pour la suivre, dans la classe de Mathématiques élémentaires, à admettre ce dernier théorème en faisant appel à l'intuition géométrique.

Il me semble qu'il serait préférable, au point de vue pédagogique comme au point de vue logique, de donner des théorèmes en question des démonstrations accessibles aux élèves de Mathématiques élémentaires et qui ne fissent appel qu'à la définition de la dérivée, comme cela a lieu pour les théorèmes directs correspondants.

Voici une marche qui pourrait être suivie pour cela. J'ignore si elle est nouvelle. Je l'indiquerai aussi brièvement que possible, et sous forme algébrique : il serait facile de la rendre, par des interprétations géométriques, plus facile pour des débutants.

Le point de départ en est dans une modification de la définition habituelle de la croissance et de la décroissance d'une fonction dans un intervalle. Cette modification rapproche, d'ailleurs, le point de vue d'où l'on peut envisager cette notion du point de vue local généralement adopté pour ce qui concerne la continuité dans un intervalle ; et elle est d'accord avec l'idée intuitive de croissance ou de décroissance.

DÉFINITION I. — Une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle (a, b) , est dite croissante pour une valeur x_0 , appartenant à cet intervalle, si $f(x)$ passe de valeurs inférieures à $f(x_0)$ à des valeurs supérieures à $f(x_0)$, lorsque x passe, en croissant, par x_0 . Cela revient à dire que $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est du signe de h , pour $|h|$ suffisamment petit (1).

REMARQUE. — Pour les bornes (a, b) de l'intervalle, h aura seulement le signe + (borne inférieure a), ou le signe — (borne supérieure b).

DÉFINITION II. — Une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle (a, b) , est dite croissante dans cet intervalle si elle est croissante pour toute valeur x_0 de l'intervalle (1).

THÉORÈME I. — Si la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle (a, b) , est croissante dans cet intervalle, la différence $f(\beta) - f(\alpha)$ est du signe de $\beta - \alpha$ pour tout couple de nombres α, β de l'intervalle (2).

(1) Définition analogue pour la décroissance.

(2) Théorème analogue et démonstration analogue pour le cas de la décroissance.

N. B. — Dans la classe de Mathématiques élémentaires, on admettra ce théorème.

Démonstration. — On peut supposer $\alpha < \beta$. Alors, $f(x)$ étant croissante pour $x = \alpha$, il existe au moins un nombre ξ de l'intervalle (α, β) , tel que l'on ait $f(\alpha) < f(x)$ pour $\alpha < x \leq \xi$. Soit E l'ensemble de tous les nombres ξ de l'intervalle (α, β) , qui possèdent cette propriété. Cet ensemble est infini, puisque tout nombre compris entre α et un nombre ξ est aussi un nombre ξ .

Soit γ la limite supérieure de E. Si x est un nombre quelconque compris entre α et γ , il y a des nombres ξ compris entre x et γ . Soit ξ l'un d'eux, en lui appliquant la propriété qui définit les ξ , on a $f(\alpha) < f(x)$ et $f(\alpha) < f(\xi_0)$. Si, d'autre part, ξ_0 est pris assez voisin de γ , ce qui est loisible, puisque γ est la limite supérieure de E, on a aussi $f(\xi_0) < f(\gamma)$, parce que $f(x)$ est croissante pour $x = \gamma$. On conclut donc $f(\alpha) < f(\xi_0) < f(\gamma)$, d'où $f(\alpha) < f(\gamma)$.

Ainsi on a $f(\alpha) < f(x)$, pour $\alpha < x < \gamma$, et γ appartient à E.

Or, cela n'est possible que si $\gamma = \beta$. Car, sans cela, $f(x)$ étant croissante pour $x = \gamma$, il existerait au moins un nombre x' , compris entre γ et β , tel que l'on eût, pour $\gamma < x \leq x'$, $f(\gamma) < f(x)$, et, par conséquent, $f(\alpha) < f(x)$; et, comme on a déjà $f(\alpha) < f(x)$ pour $\alpha < x < \gamma$, cette inégalité aurait lieu pour $\alpha < x \leq x'$. Mais alors, x serait un nombre de E, plus grand que la limite supérieure γ de E. Ce qui est contradictoire.

Nous devons donc conclure que $\gamma = \beta$; et, comme nous avons prouvé que γ appartient à E, il en résulte que l'on a $f(\alpha) < f(\beta)$. (C. Q. F. D.). On remarquera qu'il en résulte aussi que E se compose, en fait, de tous les nombres de l'intervalle (α, β) , α exclu.

THÉORÈME II. — Si la fonction $f(x)$, supposée définie dans l'intervalle (a, b) , admet, en tout point de cet intervalle, une dérivée $f'(x)$ positive, cette fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b) (1).

Car on a, pour toute valeur x_0 de l'intervalle,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h [f'(x_0 + \epsilon)],$$

ϵ tendant vers zéro avec h . De sorte que $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est du signe de h , dès que $|h|$ est assez petit, puisque $f'(x_0)$ est positif. Ce qui exprime que $f(x)$ est croissante pour $x = x_0$. (C. Q. F. D.).

THÉORÈME III. — La conclusion du théorème II subsiste si on suppose seulement que la dérivée existe et est positive pour $a < x < b$, pourvu que $f(x)$ tende, respectivement, vers $f(a)$ ou vers $f(b)$, quand x tend vers a , ou vers b (1).

En effet, le raisonnement s'applique encore pour $a < x_0 < b$; et il suffit de montrer que $f(x)$ est croissante pour $x = a$ et pour $x = b$. Démontrons-le, par exemple, pour $x = a$: cela se ferait de même pour $x = b$.

(1) Théorèmes analogues pour le cas de la dérivée négative; et démonstrations analogues.

Soit x un nombre quelconque compris entre a et b , et prenons un nombre arbitraire x_1 entre a et x . Nous pourrions écrire :

$$f(x) - f(a) = [f(x) - f(x_1)] + [f(x_1) - f(a+h)] + [f(a+h) - f(a)].$$

Dans le second membre, si on fait tendre h vers zéro, $a+h$ devient inférieur à x_1 : le premier crochet est alors un nombre positif fixe, le second un nombre positif variable, le troisième tend vers zéro par hypothèse ; donc, dès que h est assez petit, on est assuré que la somme de ces trois crochets est positive. On conclut donc $f(x) - f(a) > 0$. (C. Q. F. D.).

Théorème IV. — Si une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle (a, b) , admet, pour $a < x < b$, une dérivée $f'(x)$ égale à zéro, et si elle remplit, pour $x = a$ et $x = b$, les conditions (de continuité) du théorème III, cette fonction $f(x)$ est constante dans l'intervalle (a, b) .

Soit, en effet, x_0 un nombre quelconque de l'intervalle (a, b) , autre que a , et considérons la fonction $\varphi(x) = f(x) + m(x-a)$, où m est une constante arbitraire. Cette fonction a, pour $a < x < b$, une dérivée, $\varphi'(x) = m$. Pour $m > 0$, $\varphi(x)$ satisfait donc aux conditions du théorème III et on a : $f(a) < f(x_0) + m(x_0 - a)$. Or, on peut disposer de m (positif) de manière que $m(x_0 - a)$ soit égal à n'importe quel nombre positif : donc $f(a)$ est plus petit que tout nombre supérieur à $f(x_0)$.

En supposant, au contraire, $m < 0$, la fonction $\varphi(x)$ est décroissante, et on a : $f(a) > f(x_0) + m(x_0 - a)$, de sorte que $f(a)$ est plus grand que tout nombre inférieur à $f(x_0)$.

Donc $f(a)$ n'est égal à aucun nombre autre que $f(x_0)$; et on doit conclure $f(x_0) = f(a)$. (C. Q. F. D.).

E. VESSIOT.