

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1930**

Suivons les divers paragraphes du sujet de la composition (1), en relevant, ici et là, les observations qu'a suggérées la lecture des copies.

I. Si, partant d'une pyramide triangulaire $SABC$, que nous appellerons

(1) Voir l'énoncé page 5 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1930*.

pyramide fondamentale, et d'un point M , pris dans le plan de base, à l'intérieur de la base ABC , on mène par ce point les plans parallèles aux trois faces latérales, on détache respectivement de la première trois nouvelles pyramides, que nous appellerons secondaires. On proposait, pour débiter, de calculer la somme totale des arêtes de ces pyramides secondaires en fonction de la somme des arêtes de la pyramide fondamentale. Le silence du texte qui ne disait rien de la position de M dans le plan de base, alors que celle-ci semble devoir intervenir, était une indication. Plusieurs élèves l'ont bien compris, qui ont d'abord supposé M dans certaines positions particulières, soit sur un côté, soit en un sommet, de la base. Puis, entrant dans le calcul, on observe de suite que chaque pyramide secondaire est semblable à la pyramide fondamentale ; ceci devait apparaître d'autant plus naturellement que nos élèves de Première n'ont à connaître la notion de similitude qu'à propos de prismes et pyramides, et qu'ils ne possèdent guère qu'un seul moyen de construire deux pyramides semblables, qui est de couper une première pyramide par un plan parallèle à la base et qui est précisément celui de l'énoncé. Dans ces conditions, les sommes des arêtes de deux des pyramides, secondaire et fondamentale, sont entre elles dans le même rapport que deux de leurs arêtes parallèles : ceci a bien été vu du plus grand nombre des concurrents ; mais beaucoup l'ont fait péniblement par de longues applications du théorème de Thalès, s'attachant sans doute à répéter ce qu'ils ont appris sur la similitude ; le passage au rapport des sommes d'arêtes a conduit aussi à de lourds calculs en vue d'établir la propriété de l'addition dans une proportion. Il y a ici, en Géométrie comme en Algèbre, des notions qui devraient être plus familières, voire même intuitives, à de bons élèves de Première. Restait enfin à évaluer la somme des trois rapports de similitude. Ici, il y avait à se montrer observateur ; chaque rapport était formé avec deux arêtes parallèles dont le choix était arbitraire : mais arbitraire ne veut pas dire fantaisie ou hasard, ainsi qu'il en a été trop souvent ; il était naturel de faire le même choix pour les trois rapports ce qui leur donnait un même dénominateur et facilitait le calcul de leur somme ; puis, il était indiqué, en vue de rester en Géométrie plane, de choisir une des arêtes de la base ; les constructions effectuées décomposaient celle de la pyramide fondamentale en trois segments, et celle de chaque pyramide secondaire en deux autres respectivement égaux à deux des trois premiers ; d'où la somme des trois arêtes des pyramides secondaires égale au double de celle de la pyramide fondamentale, et, par conséquent, la somme de toutes les arêtes des pyramides secondaires égale aussi au double de la somme des arêtes de la pyramide fondamentale. Faute d'avoir fait ainsi un choix réfléchi, les concurrents ou bien ne sont arrivés au but que par de longs détours, ou bien, trop nombreux, n'ont pas su effectuer correctement l'addition des trois rapports.

A côté de cette solution naturelle, il en a été relevé quelques autres, curieuses ou ingénieuses. Certains, avertis sans doute par des considérations d'aires ou de volumes amenées par les parties suivantes, ont constaté

avec succès que chacun des trois rapports partiels, ou plutôt son complément à l'unité, se présente comme rapport d'aires de triangles ayant une base commune ; comme il s'agit de trois triangles formés en décomposant le triangle de base, la somme des trois compléments à l'unité est donc égale à l'unité.

Ainsi, cette première partie a permis déjà une première et sûre sélection en écartant les esprits faux, lourds, maladroits, peu observateurs.

II. Dans une seconde partie, le texte envisageait le parallélépipède P formé par les faces latérales de la pyramide $SABC$ et les plans parallèles issus de M ; il demandait, sans préciser davantage, d'étudier la projection de ce parallélépipède sur le plan ABC , la projection étant faite parallèlement à SM ; puis il proposait de démontrer que les deux plans définis, l'un par les extrémités des arêtes du parallélépipède issues de S , l'autre par celles des arêtes issues de M , coupent le plan ABC suivant des droites invariables quand S se déplace arbitrairement dans l'espace, ABC et M restant fixes.

Ici, le Jury a été surpris de constater que les notions de parallélépipède et de projections sont peu familières aux élèves. Qu'est-ce qu'un parallélépipède ? L'idée en est vague, confuse. On retrouve ici le même défaut de précision que l'on relève souvent à propos du parallélogramme : des notions expérimentales vulgaires, peut-être des connaissances acquises prématurément, remontent à la surface ; on croit nécessaire, dans une définition, d'accumuler toutes les propriétés de la figure, au lieu d'en donner une seule, caractéristique. Un parallélépipède est un polyèdre à six faces, deux à deux parallèles : c'est précisément le langage employé dans le texte : l'existence du parallélépipède était donc donnée, et cependant, beaucoup de copies ont cru devoir démontrer que la construction en donne bien un, que le polyèdre est constitué par deux bases et quatre faces latérales toutes en forme de parallélogramme. Et tout cela n'allait pas sans bien des longueurs inutiles, certains allant, par exemple, jusqu'à démontrer que M est un sommet du parallélépipède.

L'étude de la projection était placée ici pour éclairer les élèves, les amener à faire une figure facile et lisible. Projeter le parallélépipède sur le plan ABC , parallèlement à SM , c'est dessiner simplement la figure en faisant coïncider sur cette figure les points S et M . Malheureusement, la pratique des projections n'est pas encore familière ; les élèves éprouvent le besoin, à propos de faits très simples, de répéter la démonstration des principes, de justifier que la projection de tel point, placé sur telle droite, se fait sur la projection de cette droite, d'établir que deux droites parallèles se projettent suivant des droites parallèles, etc.

La notion de centre de symétrie, dans un parallélépipède, ce centre étant placé au point de rencontre des diagonales, amenait immédiatement à la conclusion, qui est double : d'une part, la projection forme un hexagone ayant un centre de symétrie, ayant donc ses côtés opposés égaux et parallèles ; d'autre part, elle est complétée par les trois diagonales concourantes de l'hexagone, lesquelles sont respectivement parallèles aux côtés. Le

premier point a été généralement aperçu, plus ou moins rapidement ; mais bien peu, même parmi les lauréats, ont aperçu le second. L'imprécision voulue de l'énoncé n'est pas pour eux une excuse ; ils devaient se proposer de construire un hexagone ne possédant que le premier caractère et constater ainsi que ce caractère n'est pas suffisant.

Quant à l'étude des droites, intersections du plan de base ABC avec les plans passant par les extrémités des arêtes issues de S ou de M, la construction de la figure dessinée comme l'indiquait la projection demandée, se faisait entièrement en restant dans le plan, à partir du triangle ABC et du point M ; cette figure était donc indépendante de la position de S ; il était intéressant, mais ce n'était pas indispensable, de préciser en constatant que les droites étudiées passent par certains points qui se trouvent à l'intersection de droites du plan ABC lui-même (BC et A_2A_3 , B_1C_1 et A_2A_3) (1). A ne pas comprendre l'indication donnée, on a préféré établir par le calcul que tel point, placé sur une droite, BC par exemple, est fixe, en évaluant sa distance à B, ou le rapport de ses distances à B et C. Déjà apparaît, chez les élèves de Première, la tendance à abuser du calcul ; la présence de parallèles provoque trop tôt un usage immodéré du théorème de Thalès et n'évoque pas assez leurs relations de position pourtant plus simples.

Comme conclusion de ce paragraphe, il y avait à discuter l'existence des deux droites, soit donc à chercher dans quel cas les plans définissant chacune d'elles sont parallèles. Ici encore, les qualités des parallélogrammes, mieux que le théorème de Thalès, montraient qu'il en est ainsi lorsque M est au point de rencontre des médianes de ABC. Peu de concurrents ont traité ce point, n'en comprenant peut-être pas la nécessité ; le meilleur a eu lui-même cette défaillance.

III. Un troisième et dernier paragraphe autorisait les appels à l'Algèbre. Le tétraèdre SABC et le parallélépipède P étant définis à l'aide des longueurs a, b, c et x, y, z de leurs arêtes issues de S, on demandait d'évaluer le rapport de leurs volumes, puis celui des volumes d'une pyramide secondaire et de la pyramide fondamentale, le second calcul conduisant à une relation simple entre x, y, z ; évaluation facile, aidée par la présence de bases ou de hauteurs communes, et qui a été généralement bien traitée. Supposant ensuite que M se déplace sur une parallèle à un côté de ABC, soit, par exemple, que z reste constant, il fallait déterminer pour quelles positions de M le parallélépipède a un volume donné, pour laquelle ce volume est maximum. Enfin, M se déplaçant dans tout l'intérieur de la base ABC, on demandait dans quelles positions de ce point le parallélépipède a un volume maximum ou minimum.

Il n'y a guère que les élèves récompensés qui aient abordé cette dernière partie. Le problème a été traité par le calcul ; il revenait à calculer d'abord x et y connaissant la somme $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ et le produit xy . Mais bien peu ont vu

(1) B_1C_1 , C_2A_2 , A_3B_3 sont les segments de droite, limités par les côtés du triangle ABC, situés sur les parallèles menées par M, à BC, CA, AB.

que la question se posait en ces termes simples ; ils formaient les deux équations et en déduisaient, par résolution et discussion, ou une équation du second degré à une inconnue, ou l'expression du volume de P représenté par un trinôme du second degré ; de là, par une discussion trop longue, si on arrivait jusque-là, le cas du maximum. Un seul concurrent a traité cette partie par la Géométrie, ce qui lui a valu facilement le premier rang ; habile, ainsi qu'il l'avait déjà montré au premier paragraphe, à se servir des relations entre aires et volumes, il ramène le problème à la construction de deux triangles semblables à un même triangle fixe, connaissant la somme de leurs bases et celle de leurs aires. Non seulement cet élève montre une grande habileté ; mais il sait en outre rester dans l'esprit même de la question, et cette saine logique trouve immédiatement sa récompense, la méthode mettant en évidence quelle est la position de M qui répond au volume maximum, laquelle est au milieu du segment de droite parallèle à BC parcouru par M à l'intérieur de ABC ; d'où enfin, pour M se déplaçant dans tout l'intérieur du triangle, un maximum atteint quand M est au point de rencontre des médianes. Les autres concurrents, très rares d'ailleurs, qui traitaient le premier point par le calcul, n'ont pas su interpréter le cas du premier maximum, lequel ne leur était donné que par une valeur numérique dont la signification ne leur apparaissait pas.

Quant au volume minimum, le fait était plus simple, ce minimum étant zéro, puisqu'il s'agit d'une grandeur arithmétique, et ce minimum étant atteint quand M se place sur le périmètre de ABC ; ceci était intuitif et a été signalé correctement dans quelques compositions.

Conclusions. — Le concours a réuni 493 élèves ; nombre en progression sensible sur les années précédentes où il atteignait 370 au maximum ; progression due principalement à l'appoint de l'Enseignement féminin qui nous présentait ses élèves pour la première fois. Le Jury a eu la curiosité de chercher à reconnaître, parmi les compositions, celles qui pouvaient être attribuées à la nouvelle catégorie d'élèves ; aucun indice n'a permis de donner satisfaction à cette curiosité. Le Jury voudrait en conclure que les jeunes filles qui fréquentent les classes de Première sont, en mathématiques, les émules, à égalité parfaite, de leurs camarades masculins ; mais il a eu le regret de ne trouver aucune jeune fille dans la liste des lauréats, de sorte que cette égalité n'est réalisée seulement que dans la moyenne et non dans la qualité.

L'ensemble des compositions s'est montré plutôt faible, voire même médiocre. Une centaine de copies nulles ou voisines de la nullité, indignes, en tout cas, de sujets désignés par leurs maîtres pour participer au Concours général. Il a fallu de l'indulgence pour retenir 50 compositions dignes d'une seconde lecture. De celles-ci, 20 enfin, mais 20 seulement, ce qui est trop peu, ont montré, tout en ne traitant pas entièrement le sujet, des qualités dignes d'être récompensées. Les cinq premières se classent nettement au-dessus des autres et ont été cotées respectivement : 17,5 ; 17 ; 16,5 ; 15 ; 14,5 ; elles se distinguent par des qualités de logique et de précision : les deux premiers paragraphes sont bien traités, le troisième est

amorcé ou poussé plus ou moins loin ; avec plus de temps, ces élèves auraient entièrement développé le sujet. Les quinze compositions qui suivent ont généralement traité, avec certaines longueurs ou quelques défaillances, les deux premières parties, mais sans aller plus loin ; les notes varient de 13,5 à 11,5, toutes ces copies se suivant d'assez près, sans différences bien sensibles ; c'est ce qui a permis au Jury d'épuiser le chiffre maximum de récompenses.

Il a été déjà fait mention, ici et là, de l'élève classé le premier. Il s'agit ici d'un sujet ayant à la fois un jugement solide et une maturité précoce, d'un enfant ayant déjà des connaissances étendues, acquises sans doute par la lecture, et acquises néanmoins avec sécurité ; l'élève ne se permet-il pas, dans la 3^e partie, une digression hors du programme, que le Jury n'aurait pu retenir que dans un sens défavorable, en usant correctement des conditions de maximum d'une fonction de deux variables ; digression inutile, mais gardant cependant un parfait équilibre.

A une seule réserve près, la seconde composition est digne également d'être signalée ; composition parfaitement correcte, exposant les faits dans l'esprit qui convient, et à laquelle a manqué seulement le temps nécessaire pour arriver au but ; pourquoi faut-il que cette composition soit constamment émaillée de lourdes fautes d'orthographe ?

Ceci se rattache aux questions de forme qui ont retenu, comme chaque année, l'attention du Jury. S'il a eu la satisfaction d'observer quelques copies bien ordonnées, avec des figures claires, ces copies sont encore trop rares. Mais l'orthographe paraît universellement trop négligée. Elle est d'une extrême fantaisie. Peut-être pourrait-on accepter que celui-ci souligne avec esprit les anomalies de la grammaire, lorsqu'il use de *projetantes* pour établir comment telle figure se *projète*. Si l'indulgence est permise à propos de termes techniques mal orthographiés, elle ne l'est plus lorsqu'il s'agit d'expressions mathématiques usuelles, lorsqu'on écrit : *équi-polent*, *parallèle*, *hypotèse*, *exagone*. Mais il y a plus ; les règles d'accord sont bafouées ; elles le sont alors que la pensée mathématique se présente avec limpidité ; en ne les respectant pas, l'élève permet de juger que son idée n'est pas entièrement saine ; a-t-il, en effet, une conception parfaite de la notion de rapport quand, à propos de deux pyramides, il parle du rapport de *leur volume* ? de celle de parallélogramme, lorsqu'il dit que deux segments de droite sont égaux comme *côté opposé* d'un parallélogramme ? ne confond-il pas une grandeur et sa mesure, lorsque, à diverses reprises, il dit qu'un point M prend des positions telles que la surface S *est* une valeur donnée ?

Tout cela ne démontre-t-il pas, une fois de plus, que, dans notre enseignement, les mathématiques sont au même titre que les autres disciplines, un élément efficace de la culture générale ?

L'Inspecteur général, Président du Jury de Correction,

A. TRESSE.
