

**3. Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1930**

Toute conique à centre peut être caractérisée par l'égalité $\overline{mM}^2 = k \cdot \overline{mA} \cdot \overline{mA'}$, les points A et A' étant fixes, m désignant la projection orthogonale d'un point quelconque M de cette conique sur la droite AA' et k un nombre algébrique donné. Le genre de la conique dépend du signe de k et le rapport de ses axes de la valeur absolue de cette constante.

Cette propriété rappelée dans les instructions relatives à la classe de Mathématiques, est une conséquence immédiate de l'équation d'une conique rapportée à ses axes de symétrie. Elle se prête tout particulièrement à l'étude des sections planes du cône de révolution, mais plus généralement à celle des sections perpendiculaires à un plan de symétrie d'un cône du second degré quelconque.

Elle a servi de base à la question posée au concours général de 1930 (1). Il semble donc que cette question n'eût dû surprendre personne, d'autant plus que la première partie, visant la démonstration de la propriété précitée, n'offrait aucune difficulté. Pourtant, parmi les 299 concurrents, 12 ont remis des copies blanches et se sont montrés peu dignes de la confiance qui leur avait été témoignée quand leur maître les a désignés pour participer à cette épreuve.

Comme d'habitude, chaque copie a été lue par deux correcteurs. N'ont été retenues, pour le jugement définitif, que celles dont la note moyenne dépassait une certaine limite : 8,3 dans l'espèce. 27 copies ont donc été reprises par les cinq correcteurs et 13 ont été jugées

(1) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1930*.

dignes d'une récompense, avec des notes variant de 13,43, à 10,16 (sur 20).

Les différences des notes des trois copies primées, savoir 13,43, 12,97 et 12,52 garantissent la sûreté du jugement; elles ne révèlent pas de ces supériorités qui s'imposent à première vue.

La chute est de plus d'un point lorsqu'on passe au 1^{er} accessit. Quant aux sept dernières copies récompensées, leurs notes décroissent, par degrés insensibles, à partir de 10,34. Le même phénomène se reproduit pour les 14 copies écartées (de 9,96 à 8,37).

Des différences aussi faibles montrent combien est délicate la tâche de ceux qui sont chargés de départager les concurrents. Pour donner une idée du soin qu'ils ont apporté à l'établissement et à l'utilisation de leur échelle, constatons que l'un d'eux a fait 12 propositions sur 13 copies récompensées, trois autres en ont fait 11 et le cinquième 9; encore faut-il ajouter, à la décharge de ce dernier, qu'il a proposé, avec les n^{os} 11 et 13, quatre copies écartées finalement.

Le problème comportait cinq parties.

La première a déjà été mentionnée. Elle a été traitée convenablement dans l'ensemble des copies retenues et les fautes relevées paraissent être dues à des lapsus; on confond encore les valeurs absolues et les valeurs relatives dans la comparaison des nombres algébriques h et -1 .

La seconde partie vise la recherche des foyers et des propriétés focales des coniques définies par l'équation $\overline{mM}^2 = y^2 = kzz'$, où z et z' désignent les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{m\bar{A}}$, $\overrightarrow{m\bar{A}'}$. (Les axes de coordonnées sont $A'A$ et l'axe du segment AA'). A cet effet, on demandait d'exprimer $\overline{MH}^2$, H désignant un point d'abscisse h sur $A'A$, sous forme d'un trinôme T homogène et du second degré par rapport à z et z' , et de déterminer h de façon que T soit un carré parfait.

Le calcul de $\overline{MH}^2$ en fonction de z et z' ne présente aucune difficulté. La forme du résultat n'est pas déterminée, puisque les variables z et z' sont unies par la relation $z - z' = 2a$; ($A'A = 2a$). L'emploi de cette relation permet d'obtenir plusieurs formes définies, en dehors de celle que précisait l'énoncé. On peut, par exemple, exprimer $\overline{MH}^2$ au moyen d'un trinôme du second degré, soit en z , soit en z' , soit en $\frac{z+z'}{2}$ ou $-x$. Les quatre trinômes correspondants sont simultanément des carrés parfaits.

La dernière expression est classique: des candidats la connaissaient sans doute. C'est pour libérer leur initiative qu'elle avait été laissée de côté; en fait, bien peu y ont songé. Mais la forme désirée ne figure — avec des fautes — que dans trois copies qui ont d'ailleurs été écartées du jugement définitif. Dans un grand nombre de celles qui ont été retenues, ce sont les trinômes en z ou en z' qui ont prévalu: la recherche des carrés conservait toute sa signification.

Il n'en est pas de même dans celles où les deux variables z et z' ont subsisté sans que l'homogénéité fût établie. L'imagination de leurs auteurs s'est exercée à ce propos de façon bien singulière, le sens de l'expression *carrié parfait* leur ayant échappé ; il va de soi qu'aucun n'est arrivé au résultat.

On doit conclure de ces constatations que la signification du mot *homogène* est peu connue et que certains la confondent avec celle du mot *symétrique*.

Deux points H et H' qui ne sont autres que les foyers de la conique et qui ont pour abscisses respectives $\pm aq$, ($q = \sqrt{1+k}$), répondent à la question. On demandait de trouver la relation qui existe entre HM et $H'M$, c'est-à-dire la formule qui traduit la définition géométrique habituelle des coniques. Il fallait, pour cela, donner les valeurs précises de HM et de $H'M$ (arithmétiques) en fonction linéaire et homogène de z et z' , si l'on s'en tenait à l'énoncé, en fonction linéaire de z , ou z' , ou x , si l'on employait uniquement l'une de ces dernières variables. Il y a là une discussion intéressante que personne n'a faite.

Cette lacune est assez grave ; les conséquences le sont plus encore. On a démontré que $HM - H'M = 2a$ dans quelques copies, $HM + H'M = -2a$ dans une autre. De pareils résultats impliquent des contradictions qui n'auraient pas dû rester inaperçues.

Il a suffi en somme de changer les notations pour dépayser des concurrents dont certains sont parmi les mieux classés. Si l'on avait employé les dénominations F, F', c , au lieu de H, H', q , il est probable qu'aucun n'aurait commis ces fautes. Il y a donc encore beaucoup à faire pour substituer l'esprit de recherche au mécanisme des démonstrations.

L'étude des sections planes, faites par des plans Π perpendiculaires au plan de symétrie évident Q dans un cône (S) de base circulaire, est l'objet de la troisième partie. Elle se bornait d'ailleurs aux sections elliptiques ; à cet effet, la trace BB' du plan Π sur le plan Q était définie par deux points B et B' situés sur les deux demi-généatrices principales qui passent par les points A et A' où le cercle de base est coupé par Q . Une série de détails étaient visés : quel est le genre de la section ? BB' est-il l'axe focal de la conique ? Peut-on déterminer les angles β et β' , de sommets B et B' dans le triangle SBB' , de sorte que cette conique soit semblable à une ellipse donnée ?

Des considérations géométriques permettent de prévoir certains résultats, sinon de les établir en toute rigueur. Elles ont été assez souvent employées. Par exemple, le choix de B et de B' indique que la section est une courbe fermée : est-ce une ellipse ? On connaît à priori deux familles de plans cycliques : sont-ce les seules ? Une recherche précise de β et β' permet de donner une solution précise que personne n'a fournie de façon irréprochable.

α et α' désignant les angles de sommets A, A' , dans le triangle SAA' , un calcul facile montre que les points de la section du plan Π

vérifient l'équation $\overline{mM}^2 = k\alpha\alpha'$, où la constante k a pour valeur $-\frac{\sin \beta \cdot \sin \beta'}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha'}$. Comme elle est négative, la section est une ellipse.

La valeur absolue de k est le carré du rapport des longueurs de l'axe de symétrie perpendiculaire à BB' et de l'axe BB' . Il y a donc lieu d'étudier la variation de $k = -\frac{\sin \beta \cdot \sin \beta'}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha'}$, dans les conditions de l'énoncé. Si l'on tient compte de la relation $\beta + \beta' = \pi - \theta$, θ désignant l'angle $\widehat{ASA'}$, on peut aussi écrire $k = \frac{\cos(2\beta + \theta) - \cos \theta}{2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha'}$.

Le numérateur seul dépend de la variable β . Or, si l'on fait appel à la symétrie du cône par rapport à la bissectrice SI de l'angle $\widehat{ASA'}$ et de l'homothétie des sections parallèles, on peut se borner à faire varier β de $\frac{\pi - \theta}{2}$ à $\pi - \theta$, en passant par la valeur α (on suppose $\alpha > \alpha'$). Dans ces conditions, le numérateur de k croît de $-1 - \cos \theta$ à 0, en passant par la valeur $-2 \sin \alpha \sin \alpha'$ pour $\beta = \alpha$. Par suite k croît de $\frac{-(1 + \cos \theta)}{2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha'}$ à 0, en passant par la valeur -1 pour $\beta = \alpha$. Les conclusions en découlent : dans l'intervalle $(\frac{\pi - \theta}{2}, \alpha)$, le grand axe de la section est perpendiculaire à BB' ;

ce fait se produit en particulier au départ, où le plan Π est perpendiculaire à l'axe SI , de sorte que ce grand axe est parallèle au plan cyclique. Dans l'intervalle suivant $(\alpha, \pi - \theta)$ le grand axe est BB' .

Les ellipses obtenues dans le premier intervalle acquièrent toutes les formes comprises entre l'ellipse initiale de section droite et un cercle ; celles qui correspondent au second intervalle prennent une fois toutes les formes possibles.

La discussion du problème relatif au calcul de β et β' , ce calcul même résultent de ce qui précède. Remarquons encore que l'inconnue $\cos(2\beta + \theta)$ qui est fournie par une équation du premier degré, n'est autre que $-\cos(\beta - \beta')$.

Une dernière étude touchant les symétries du cône (S) a généralement donné de bons résultats. Relevons cependant l'erreur classique de celui qui voit un axe de symétrie dans la droite définie par le sommet du cône et le centre du cercle de base.

Dans la quatrième partie, un cône (Σ) étant donné par une section droite elliptique (E) et par le sommet Σ situé sur la perpendiculaire au plan de (E), menée par son centre, on proposait d'étudier les sections faites dans ce cône par des plans Π perpendiculaires à l'un des deux plans de symétrie $\Sigma AA'$, $\Sigma BB'$, AA' et BB' étant les axes de (E).

Plus particulièrement on demandait de voir si ces sections peuvent être des cercles.

Dans ce cas encore la trace $\Pi T'$ du plan Π sur le plan principal

auquel Π est perpendiculaire, doit rencontrer les demi-généatrices principales ΣA , $\Sigma A'$ ou ΣB , $\Sigma B'$ contenues dans ce plan principal.

La détermination de la constante k relative à une section est encore facile. Si l'on suppose Π perpendiculaire au plan principal $\Sigma AA'$, si l'on désigne par α la valeur commune aux angles A et A' , dans le triangle $\Sigma AA'$, par γ et γ' les angles Γ et Γ' du triangle $\Sigma \Gamma \Gamma'$, par k_0 et k les valeurs de la constante k relatives à la base (E) et à la section

contenue dans Π , on trouve : $k = k_0 \frac{\sin \gamma \cdot \sin \gamma'}{\sin^2 \alpha}$. k_0 étant négatif,

k l'est aussi et la section étudiée est une ellipse. On a cette fois les relations $2\alpha = \gamma + \gamma' = \pi - \theta$, θ désignant l'angle $\widehat{A \Sigma A'}$ et quand γ varie de α à $\pi - \theta$, on peut suivre la variation de k sur la

formule $k = \frac{k_0}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} [\cos \theta - \cos (2\gamma + \theta)]$.

La section est un cercle lorsque γ vérifie l'équation

$$\cos (2\gamma + \theta) = \cos \theta + \frac{1 + \cos \theta}{k_0}$$

Or, si l'on regarde le second membre comme une fonction de k_0 , on constate qu'il décroît de $\cos \theta$ à -1 quand k_0 croît de $-\infty$ à -1 , et de -1 à $-\infty$ quand k_0 croît de -1 à 0 . Cette équation ne peut définir γ que si k_0 est inférieur à -1 , c'est-à-dire si AA' est le petit axe de (E). Le plan Π est alors parallèle au grand axe de cette ellipse.

Ce résultat constitue un recoupement avec ceux de la troisième partie ; il n'a été obtenu que dans un très petit nombre de copies.

La géométrie reprend le rôle principal dans la cinquième partie. Constatons avec plaisir que le maniement en paraît familier au plus grand nombre des auteurs des copies retenues.

S désignant un point fixe, à tout point M d'une courbe donnée (C), on peut associer le plan Π perpendiculaire à SM en M . Ce plan dépend d'un paramètre et enveloppe une développable. En particulier, si (C) est un cercle, Π passe par un point fixe S' diamétralement opposé à S , sur la sphère définie par S et (C), et ce plan enveloppe un cône (S').

La trace MT du plan Π , sur le plan P de (C), étant perpendiculaire à SM , l'est aussi à sM , s désignant la projection orthogonale de S sur P . La podaire du point s , par rapport à l'enveloppe de MT , est donc le cercle (C). Cette enveloppe, c'est-à-dire la trace de (S') sur P , est une conique — ellipse ou hyperbole — dont le cercle principal est (C) et dont les foyers sont s et le symétrique s' de ce point par rapport au centre de (C) ; on voit de suite que s' est la projection de S' sur P .

Le cône (Σ), enveloppe des plans perpendiculaires aux génératrices de (S), menés par S , [cône supplémentaire de (S)], est parallèle à (S') et il s'en déduit par la translation $\vec{S \bar{S}}$. Il est facile de définir sa base sur le plan P . De même que S' se projette sur P en un foyer s' de la base de (S'), le point S se projette sur le même plan en un foyer s de la base de (Σ).

On doit se demander si cette propriété est générale, c'est-à-dire si l'on peut trouver, sur tout cône (S) de base circulaire, des coniques dont un foyer soit la projection du sommet S sur leur plan. La réponse est immédiate : les plans de ces coniques sont les plans cycliques du cône (Σ), plans dont l'existence a été établie. Cela résulte de la réciprocity des cônes supplémentaires et l'on retrouve ainsi les propriétés des focales des cônes du second degré.

La plus grande partie de ces résultats a été obtenue dans bon nombre des copies récompensées ; mention complète en a été faite dans quelques-unes.

Il a été surtout question, dans cette étude, des meilleures copies.

En parcourant celles qu'un premier choix a éliminées, on trouve çà et là des sottises qui surprennent toujours, même ceux qu'une longue expérience devrait avoir habitués à de pareilles rencontres.

En voici quelques-unes copiées textuellement :

« $\frac{y^2}{ka^2} + \frac{x^2}{a^2} = -1$, ce qui est l'équation d'une hyperbole, ou encore

$\frac{y^2}{-ka^2} + \frac{x^2}{-a^2} = 1$, ce qui est l'équation d'une ellipse. »

« L'équation $\frac{k^2 + 1}{k^2} y^4 + 2(x^2 + a^2)y^2 + a^4 + 2a^2x^2 + x^4 = 0$ est homogène et du second degré en x et en y , ce doit donc être l'équation d'une conique. »

« $-\left(\frac{z^3 - z'^2}{4a}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{z^2 + z'^2 - 2kzz'}{2a^2} = 1$. On reconnaît la forme de l'équation d'une conique : d'une hyperbole. »

Si les candidats qui ont produit ces horreurs n'étaient pas sous le coup de véritables aberrations, on doit conclure que leur place n'était pas dans une classe de Mathématiques, moins encore au Concours général.

Mais, en moyenne, les résultats de l'épreuve, s'ils n'ont pas révélé d'aptitudes hors de pair, ne sont pas inférieurs à ceux des années précédentes. Certains élèves n'ont pas résisté au plaisir d'étaler leurs connaissances hors de propos, mais les accroc à la logique ne sont pas plus fréquents que dans le passé.

L'Inspecteur général, Président du Jury de correction,

E. BLUTEL.