

**10. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1929**

L'épreuve de mathématiques, dans la classe de Première, au Concours Général de 1929, a été traitée pour la première fois par les élèves formés suivant le nouveau plan d'études. Elle constitue ainsi une expérience qui permet d'apprécier sur un point la valeur de l'organisation nouvelle. La culture scientifique allait-elle être en régression en s'intégrant dans la culture générale ? Les copies récompensées, et celles qui ont été discutées à leur suite, nous rassurent ; elles valent celles des années précédentes ; elles sont même en progrès sur celles de 1928. Nous reviendrons sur ce point dans nos conclusions. Mais nous aurons surtout à nous occuper dans ces lignes, de l'ensemble des compositions et des faiblesses qui s'y révèlent : les faiblesses de la masse seront plus instructives que les qualités de l'élite.

Le sujet proposé touchait à la fois à la Géométrie et à l'Algèbre. La Géométrie, même sur les points les plus délicats, s'est montrée plus favorable aux concurrents que l'Algèbre. C'est qu'en Algèbre, les élèves avaient, ou croyaient avoir, des procédés mécaniques à employer, des méthodes régulières à suivre, alors que procédés et méthodes s'offraient moins en Géométrie ; l'observation directe, le jugement personnel se révèlent plus féconds et plus sûrs que les sentiers battus ; n'y a-t-il pas là, une fois de plus, la preuve que la culture scientifique, à l'âge de nos élèves, est faite pour développer le jugement plutôt que pour accroître les connaissances ?

Le thème consistait dans l'étude d'un tétraèdre où se distinguent deux arêtes opposées AA' , BB' , que nous pourrions appeler arêtes *dorsales*, les quatre autres étant les arêtes *latérales*. Il y avait d'abord à établir que si les arêtes latérales sont toutes égales, leurs dièdres, en appelant dièdre d'une arête celui qui est formé par les deux faces du tétraèdre dont cette arête est un côté, sont égaux, et réciproquement. Pareil tétraèdre peut être

défini comme ayant deux plans de symétrie ; ceci apparaissait de suite dans la proposition directe ; le plan médiateur d'une arête dorsale est en effet un plan de symétrie, car il contient les sommets non situés sur cette arête. C'est ce qui apparaît aussi dans la réciproque, par la considération de trièdres ayant deux dièdres égaux ; un tel trièdre admet un plan de symétrie, lequel est à la fois le plan bissecteur de son troisième dièdre et le plan mené par la bissectrice de la face opposée, perpendiculairement à cette face ; c'est le cas des deux trièdres du tétraèdre dont les sommets sont aux extrémités d'une arête dorsale ; de plus, les plans de symétrie de ces trièdres se confondent, étant pour tous deux le plan bissecteur du dièdre correspondant à l'arête dorsale ; donc enfin ce plan est aussi plan de symétrie du tétraèdre. Les deux propositions réciproques sont des conséquences immédiates de ces symétries.

Ce premier point, porte d'entrée dans le sujet, a été au moins abordé par tous les concurrents. De suite, il a permis de distinguer ceux qui sont accessibles aux idées générales et ceux qui ne peuvent se détacher des faits isolés. D'abord, la plupart ont eu recours aux cas d'égalité des triangles et des trièdres plutôt qu'aux propriétés de la symétrie. Puis, au lieu d'étudier les hypothèses, de les réaliser, de construire, par exemple, un tétraèdre dont les quatre arêtes latérales sont égales, ils vont à la proposition dont l'énoncé leur est donné, ils se proposent, pour établir l'égalité de deux dièdres ou de deux arêtes, de les faire entrer dans des trièdres ou triangles égaux. Un sommet, une arête, constituent pour eux un sommet, une arête isolés ; ce que l'on en dit ne vaut pas pour un autre sommet, une autre arête. Or, il était intéressant, dans la question, de reconnaître les éléments qui jouent le même rôle, par exemple les arêtes dorsales d'une part et les arêtes latérales d'autre part. Les élèves, en trop grand nombre, établissent l'égalité $AB=AB'$; ils ne savent pas l'interpréter ; ils n'y songent pas ; ils ne constatent pas qu'elle exprime que deux arêtes latérales consécutives sont égales, de sorte que toutes ces arêtes sont égales entre elles et que la question est épuisée ; ils répètent leurs raisonnements pour établir les égalités $A'B=A'B'$ puis $BA=BA'$ $B'A=B'A'$; quelques-uns même ne peuvent aller plus loin que les deux premières égalités et sont dans l'impossibilité de conclure. Nous nous sommes astreint, tout à l'heure, à donner la démonstration de cette première partie sans faire usage d'aucune notation, pour mieux souligner combien le jury appréciait l'élève qui sait dégager une idée générale ; les notations sont bonnes pour faciliter l'exposition ; elles ne doivent pas restreindre le sujet. Ajoutons encore que l'idée générale est plus claire ; les considérations de symétrie sont plus intuitives, plus faciles à suivre ; rien n'est pénible, pour le lecteur comme pour l'élève, comme un raisonnement sur des triangles ou trièdres égaux, comme l'intervention d'angles, de dièdres, de trièdres, définis uniquement par des notations littérales complètes, telles que angle $AB'B$, dièdre $ABA'B'$, trièdre $AA'BB'$; dièdre BA' , trièdre A , suffisent ici, sans compter que, par inadvertance, les premières notations sont souvent fautives.

Pour terminer cette première partie, il y avait à établir les relations qui existent entre les directions des deux arêtes dorsales et de la droite joignant leurs milieux, et qui caractérisent le tétraèdre, enfin à projeter le tétraèdre sur un plan parallèle aux arêtes dorsales. En majorité, les élèves ont bien vu que les trois droites sont deux à deux rectangulaires, que la projection du tétraèdre est un losange ; mais beaucoup n'ont pas compris la signification du mot « caractéristique », et ne se sont pas préoccupés de chercher si les propriétés qu'ils découvraient sont suffisantes.

La seconde partie géométrique du sujet, la troisième du texte proposé, proposait l'étude du tétraèdre dans l'hypothèse où il existe une sphère tangente intérieurement aux six arêtes de ce tétraèdre. Cette partie n'a été étudiée que par les bons élèves. Une indication du texte disait de déterminer la position des points de contact de cette sphère avec les arêtes ; il était naturel d'envisager les sections de la sphère par les plans des faces ; ce sont des cercles tangents aux arêtes, donc inscrits intérieurement dans les triangles de ces faces, et comme ces triangles sont isocèles, les contacts avec les bases de ces triangles isocèles, arêtes dorsales du tétraèdre, sont au milieu de ces arêtes ; avec chaque arête latérale, le contact est donc à une distance d'une extrémité quelconque de cette arête égale à la demi-arête dorsale partant de cette extrémité ; d'où cette condition nécessaire pour l'existence de la sphère, que la longueur commune des arêtes latérales soit égale à la demi-somme des arêtes dorsales. Ces résultats simples ont été obtenus par des voies plus longues, partant de la considération des contacts avec trois arêtes issues d'un même sommet, lesquels sont équidistants de ce sommet. Le caractère suffisant de la condition n'a été traité, très correctement du reste, que par les deux meilleurs.

On demandait ensuite d'étudier la figure formée par les quatre contacts avec les arêtes latérales : les bonnes copies ont bien constaté que c'est un rectangle, ses côtés étant deux à deux parallèles aux arêtes dorsales ; un calcul très simple des longueurs de ces côtés, que peu de concurrents ont abordé, montrait que ce rectangle est un carré. En projetant alors sur un plan parallèle aux arêtes dorsales, ce carré se projette en vraie grandeur, et si le tétraèdre se déforme de telle sorte que les supports des deux arêtes dorsales, et leurs milieux restent fixes, le centre du carré, les directions de ses côtés, les supports de ses diagonales, restent fixes en projection, les quatre points de contact restent donc dans deux plans fixes, les plans qui projettent ces diagonales, et ces points de contact eux-mêmes ont comme lieux géométriques les grands cercles d'intersection de la sphère qui reste fixe, avec ces deux plans. Cette solution a été aperçue, à peu près dans ces termes, par les deux premiers lauréats. Ici, le jury s'était plu à proposer aux concurrents de 1929 de réparer une faiblesse de leurs camarades de 1928 en les amenant, par d'autres considérations, à traiter une partie du sujet de 1928. La question n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un exercice aujourd'hui classique, le lieu du contact avec

une sphère fixe, d'une droite mobile s'appuyant sur deux tangentes fixes à cette sphère. Un certain nombre de concurrents ont reconnu la question ; mais ils l'ont traitée avec leurs souvenirs, sans la rattacher au sujet proposé, entrant ainsi dans une recherche isolée, longue et délicate, alors que, en l'espèce, la solution était immédiate.

Dans le sujet s'intercalait une partie d'Algèbre, la seconde du texte, qui demandait d'abord le calcul, en fonction de a , b , h , longueurs des arêtes dorsales AA' , BB' et de la droite IJ joignant leurs milieux, de c , longueur commune des arêtes latérales, R , rayon de la sphère circonscrite, et V , volume du tétraèdre ; ensuite, inversement, on proposait le calcul de a et b , étant donnés h , c et R . C'est cette partie qui a eu le moins de succès. Est-ce parce que, en Algèbre, l'initiative, l'originalité, entrent moins en jeu avec nos élèves, que les méthodes régulières les dispenseraient de réfléchir ?

Le calcul de R se fait en déterminant, sur IJ , le centre de la sphère circonscrite, point O équidistant de A et B et répondant ainsi aux deux conditions

$$\overline{IO} + \overline{OJ} = h, \quad \overline{OI}^2 + \frac{a^2}{4} = \overline{OJ}^2 + \frac{b^2}{4}.$$

La plupart des élèves n'ont pas observé que O peut aussi bien être placé en dehors de I et J qu'entre ces deux points ; ils tracent OI et OJ comme des longueurs ; quelques-uns font la remarque, mais ne savent pas employer les vecteurs, et, distinguant deux cas, font deux fois le même calcul. Puis, de même que en Géométrie les arêtes dorsales jouent le même rôle, le résultat doit être symétrique en a et b , et les copies se contentent d'une expression de R où n'apparaît pas cette symétrie, se privant ainsi d'un contrôle précieux.

Mais c'est surtout dans le calcul inverse de a , et b en fonction de c , h et R qu'apparaissent les fautes les plus graves et les plus nombreuses, l'absence générale de jugement, faiblesses dont les copies couronnées n'ont même pas été à l'abri. D'abord, il semble à beaucoup que la question soit uniquement de faire surgir les valeurs demandées d'heureuses combinaisons de calcul. On écrit des équations sans se préoccuper de leur signification, ni des conditions qu'elles doivent traduire ; alors que ces équations étaient, en fait, indiquées dans le texte, qu'elles étaient formées avec les expressions précédemment calculées de c et R , plusieurs élèves reprennent le problème *a priori*, négligent ces expressions, et recommencent des calculs déjà faits. La résolution est ensuite assez correctement menée ; les uns calculent a^2 et b^2 , ou a et b , en cherchant leur somme et leur produit ; les autres, plus nombreux, calculent $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2$. Ici, un premier fait curieux : $a^2 - b^2$ apparaît par son carré ; aucun élève ne signale les deux valeurs opposées qui en résultent pour $a^2 - b^2$, tous ne donnent que la valeur positive, mais sans faire remarquer que ceci se légitime en distinguant la plus grande arête, a , de la plus petite, b . Aucun non plus n'indique, comme conclusion, que le problème ne peut comporter qu'une seule solution.

Quant à la discussion, aucun élève n'a su la mener à bien. Et c'est bien ici que la faiblesse provient de l'absence de jugement, de l'obéissance à une discipline acceptée, mais non réfléchie. Et d'abord, d'où viennent les conditions à remplir ? du fait que a et b doivent exister, puis être positives. C'est tout, puisque, dans la mise en équations, a et b ne sont que deux longueurs quelconques. Or, on en cherche d'autres. L'un dit, par exemple, que a et b doivent en outre être inférieures à $2R$; présentée autrement, la remarque serait intéressante et témoignerait d'un esprit observateur ; ici, elle est inutile, elle constitue une faute de logique, cette condition est surabondante ; elle n'est qu'une conséquence des conditions précédentes, du fait que celles-ci sont nécessaires et suffisantes ; et cette faute de logique va se payer chèrement, notre élève commettant en outre une faute de calcul quand il exprime cette condition. A rebours, d'autres déclarent que certaines conditions $c \leq 2R$, $h \leq 2R$, $h \leq c$, sont toujours vérifiées, parce qu'un segment de droite intérieur à une sphère est plus petit que le diamètre, ou parce que l'oblique est plus grande que la perpendiculaire ; ici encore, la remarque est intéressante, mais elle ne vaut qu'à titre d'indication ; elle signifie seulement que la discussion serait défectueuse si elle ne conduisait pas à ces inégalités.

Les transformations d'inégalités, par multiplication ou par élévation au carré, sont assez correctement effectuées ; les méthodes de calcul sont régulières ; mais c'est la signification, l'interprétation de ces calculs et de leurs résultats, qui échappent, qui n'existent pas. La composition classée la première en donne elle-même un curieux exemple. L'élève détermine a^2 et b^2 comme racines de certaine équation du second degré ; il connaît la méthode mécanique qui permet d'établir les cas où un problème du second degré admet soit une, soit deux solutions ; il s'obstine à l'appliquer ici, alors qu'une solution du problème est représentée, non par une racine de l'équation, mais par l'ensemble des deux. Certainement, cet élève serait arrivé au but de lui-même et facilement, s'il n'avait pas été paralysé par le mécanisme, s'il ne l'avait pas connu, s'il avait été obligé de réfléchir, s'il avait constaté qu'il s'agit de chercher seulement à quelles conditions une équation du second degré a deux racines positives. Une fois de plus, et qui ne sera jamais la dernière, l'exemple montre qu'il vaut mieux comprendre qu'apprendre.

Le concours a réuni 431 concurrents. Sur ce nombre, 50 environ ont obtenu la moyenne et ont été retenus pour une seconde lecture. Les quatre premiers ont donné pleine satisfaction au Jury, sauf les réserves qui viennent d'être faites à propos de la partie d'Algèbre. En Géométrie, les faits sont bien observés, le souci des conditions nécessaires et suffisantes est partout respecté, celui d'un jugement complet également ; c'est ainsi que l'un d'eux dit bien, en constatant que certain quadrilatère est un rectangle, que cela l'amène à examiner si ce quadrilatère peut être un carré. Un autre, notre premier lauréat, en donnant le rapport des volumes du tétraèdre et de la sphère tangente aux arêtes, observe bien que

ce rapport est constant, et que le fait est intéressant, alors qu'il s'agit de deux figures qui varient sans rester semblables.

Les neuf compositions suivantes, qui ont été récompensées, se suivent de très près avec des notes s'accumulant dans un intervalle total inférieur à deux points. La plupart ont traité la partie géométrique avec peu de fautes et de lacunes ; chacune l'aurait sans doute traitée entièrement et correctement s'il avait été possible d'avertir l'attention de l'élève sur quelque conclusion précipitée, quelque observation incomplète.

Les deux premiers lauréats ont été difficiles à classer, leurs compositions présentant les mêmes qualités comme les mêmes faiblesses, et ne se distinguant que par des nuances très délicates. Tous deux ont faibli en Algèbre, le premier, dont nous avons relevé tout à l'heure l'erreur principale un peu plus que le second ; tous deux ont traité complètement la partie de Géométrie, le premier sans aucun reproche, le second, en ne serrant pas assez la recherche de la sphère, dans la quatrième partie, en affirmant sans justification un résultat essentiel, celui que la sphère est tangente en leurs milieux aux deux arêtes dorsales.

En revanche, il nous faut revenir, comme les années précédentes, sur la trop forte proportion de compositions insuffisantes, pour ne pas dire plus. Certains élèves prennent part au concours, qui ne semblent vraiment pas qualifiés pour le faire. Il s'agit ici, non pas de ceux qui n'ont pu résoudre le problème ou même qui ne l'ont pas abordé, mais des nombreux concurrents qui, dans un travail de quatre à cinq pages, révèlent abondamment leur ignorance, leur manque de sens critique, et une totale incompréhension des méthodes mathématiques. C'est certainement leur rendre un mauvais service que de leur laisser croire, en les conviant à participer au Concours Général, qu'ils auraient raison de persévérer dans l'étude des mathématiques.

Le carnet scolaire d'un élève qui a participé au Concours Général en fait mention ; il faut que cette mention ait une valeur fondée. Si les errements signalés devaient se prolonger ou se multiplier, le Jury serait amené à proposer la radiation de cette mention sur ce même carnet scolaire.

L'Inspecteur Général, Président de la Commission de Correction,

A. TRESSE.
