

V. Documents officiels

4. Rapport sur le Concours, en 1930, de l'Aggrégation des Sciences mathématiques (1)

Epreuves écrites (2)

Mathématiques élémentaires (M. TRESSE). — 93 concurrents ont traité le sujet de Mathématiques élémentaires. En général, ils ne l'ont pas fait avec succès. Dix seulement ont atteint la moyenne, témoignant ainsi, en l'espèce, d'une certaine supériorité, d'une puissance appuyée sur des facilités de moyens ; ils se sont fait apprécier avec des notes respectives de 17,5 ; 17 ; 15,5 ; 14,5 (deux fois) ; 13 ; 11,5 (deux fois) et 10 (deux fois). A ce premier lot de qualité en succède un second, comprenant dix autres candidats qui méritent d'être tenus pour intelligents et sérieux, et dont les notes s'échelonnent assez régulièrement de 9 à 6. La faiblesse réunit ensuite un groupe plus nombreux et plus dense de 25 candidats qui, par groupes de trois, quatre ou cinq, obtiennent des notes allant de 5,5 à 2,5. Enfin, la médiocrité, l'indigence, sont malheureusement les plus richement parta-

(1) Le jury était composé de MM. TRESSE, Inspecteur général, président ; THYBAUT, Inspecteur d'Académie ; GARNIER, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; PÈRÈS, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille ; HENNEQUIN, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Buffon.

(2) Voir les énoncés pages 15 et suivantes des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours de 1930*.

gées en réunissant dix fois la note 1,5 ; onze fois la note 1, et vingt-cinq fois ceux qui, grâce à un mot correct, échappent avec un demi-point à la nullité ; soit exactement, avec deux copies nulles, la majorité des concurrents !

En revanche, ces constatations purement numériques font heureusement place à d'autres, plus rassurantes, si l'on observe que les concurrents du premier groupe ont tous été admissibles, et, à une exception près, tous admis définitivement, que, dans le second groupe, trois sujets seulement échouent à l'admissibilité (et encore sont-ils de ceux qui, avec des 6 ou 6,5, obtiennent les notes les plus faibles de ce groupe) et deux autres aux épreuves orales. Parmi les dix-neuf agrégés nouveaux, il n'en est que trois qui, cotés 5 ou 4, appartiennent au groupe des faibles, et trois autres, cotés 1,5 ou 1, appartenant à celui des médiocres ; nous voulons croire que leur faiblesse ou leur médiocrité ne sont que défaillances passagères, accidents de concours.

Le thème proposé était cependant, au moins en grande partie, d'une substance élémentaire accessible à nos élèves de la classe de Mathématiques. Il s'agissait d'étudier une famille de coniques, ou de quadriques de révolution, ayant toutes un même foyer fixe O et même longueur $2a$ de l'axe focal. Ce simple énoncé semblait devoir immédiatement suggérer que chacune de ces coniques ou quadriques peut être définie soit par un même cercle directeur (ou une même sphère directrice) de centre O , de rayon $2a$ et un second foyer F de position entièrement arbitraire dans le plan ou l'espace, soit par un cercle directeur (ou une sphère directrice) de rayon invariablement égal à $2a$ mais de position arbitraire et le foyer fixe O . Or, dès le début, la grande majorité des concurrents en est restée à la définition des coniques ou quadriques par la somme ou différence constante des distances d'un point aux deux foyers. Pareillement, une tangente à une conique est définie comme bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact, bissectrice extérieure ou intérieure suivant les cas, quand on éprouve le besoin de préciser : mais on paraît ignorer cette règle à la fois plus facile, plus précise et plus générale qui caractérise toute tangente comme étant médiatrice d'un segment ayant une extrémité en un foyer, et l'autre extrémité sur le cercle directeur centré à l'autre foyer.

Le problème comportait, à diverses reprises, la détermination de l'enveloppe des coniques ou quadriques de la famille assujetties à certaine condition, comme, par exemple, celle d'être tangente à une droite ou un plan fixe. La recherche d'une enveloppe de courbes ou surfaces autres que des droites ou des plans dans une question de Géométrie élémentaire a déconcerté des concurrents qui, à juste titre, ne se croyaient pas autorisés, dans ce domaine, à utiliser la règle, à base purement analytique, des points ou tangentes limites ; le texte les en avertissait d'ailleurs, et les éclairait en même temps, en faisant ce mot d'enveloppe, mais en demandant d'établir que ces courbes ou surfaces sont tangentes à une courbe ou surface fixe. Il y avait donc à rechercher et à déterminer cette dernière ; il y avait à en amener la définition par des voies naturelles et élémentaires. Sans faire

appel à la règle analytique, il n'est pas interdit à de futurs maîtres de s'en inspirer ; il était naturel, soit de chercher les points limites ou les tangentes limites (cette seconde recherche était celle qui réussissait le mieux), soit de discuter le problème des courbes ou surfaces passant par un point quelconque donné ou tangentes à une droite ou un plan. Ensuite, le point de vue élémentaire, l'absence dans ce domaine de la règle que nous venons de mentionner, exigeaient la vérification du contact, vérification facile d'ailleurs : ceci a échappé à un grand nombre de candidats. Quelques-uns l'ont bien compris qui, ne se sentant pas autorisés à parler de points limites, ont défini *a priori* la courbe enveloppe, sans indiquer son origine, pour démontrer ensuite qu'il y a contact. Ces diverses lacunes ont été jugées du reste avec indulgence ; elles n'avaient pas la gravité de la faiblesse qui paralysait la majorité des candidats, absolument arrêtés devant cette question d'enveloppes.

Certains candidats, au lieu de chercher à découvrir les caractères essentiels d'une question, pour s'en inspirer ensuite, tendent plutôt à faire étalage de leurs connaissances, et de connaissances qui, pour être nombreuses et variées, sont trop souvent plus dispersées qu'assimilées. Tel arrive, par de longs détours où il est question de droites anti-parallèles, de théorèmes de Poncelet, du produit des distances des deux foyers à une tangente, à la détermination des tangentes communes à deux coniques ayant un foyer commun. D'autres se proposent *a priori*, sans en indiquer de raisons, d'effectuer une transformation de la figure. La présence de coniques ayant un même foyer O suggérerait naturellement de transformer par polaires réciproques en prenant pour conique directrice un cercle de centre O ; cette opération transforme les coniques de foyer O en cercles ; mais la qualité de l'axe focal de grandeur constante ne se transforme pas d'une manière simple : cela devait avertir qu'il fallait abandonner ou modifier la méthode. En faisant suivre la transformation d'une inversion, on avait la transformation par podaire, laquelle donnait un cercle de rayon constant, et on revenait ainsi, par un détour, à l'usage naturel des cercles directeurs que nous indiquons au début de ces lignes. Ceci n'a bien été entrevu que par un seul candidat ; plusieurs ont tenté, avec plus ou moins de succès, de tirer parti de la seule transformation par polaires réciproques. Un peu plus de souplesse, comme toujours, aurait mieux convenu et réussi ; mieux valait user, suivant les circonstances, tantôt d'un procédé, tantôt de l'autre, et, par exemple, dans l'usage des cercles directeurs, il y avait avantage à recourir tantôt à l'un, qui est fixe, tantôt à l'autre, qui est variable.

Des fautes de dogmatisme, des affirmations incomplètes ou erronées, excusables chez des débutants, ne peuvent guère être permises à ceux qui aspirent à être demain des maîtres. Et cependant, nous en relevons trop souvent. C'est d'abord celle, trop fréquente, qui se commet dans la recherche d'un lieu géométrique. Ici, un certain point R , point de contact d'une quadrique variable avec une surface Σ , apparaît comme étant à la fois sur cette surface Σ , quadrique de révolution ayant un foyer en O , et sur

un cône de révolution ayant ce point O pour sommet ; cela suffit à beaucoup pour affirmer que le lieu est l'intervention de Σ et du cône ; la réciproque fait défaut, et cette fois, la conclusion est inexacte ; le lieu n'est en effet qu'une seule des deux coniques en lesquelles consiste l'intersection de Σ et du cône. Ailleurs, on affirme que, du fait que deux surfaces de révolution ont des méridiennes tangentes entre elles, les surfaces sont aussi tangentes ; il serait bon cependant, en Géométrie élémentaire surtout, de faire observer que ceci tient aussi à ce que les méridiennes sont dans un même plan. Sur un autre point encore, il y avait à déterminer, en les déduisant les unes des autres, les enveloppes de l'axe non focal et des deux directrices d'une conique variable. Un calcul simple montrait, ainsi que le demandait le texte, que ces droites restent deux à deux homothétiques. Car le rapport d'homothétie, évalué dans ce calcul, peut être, dans certains cas, nul ou infini ; aucun candidat ne s'est arrêté à ces cas particuliers, dans lesquels l'une des droites étudiées passe par un point fixe.

En résumé, composition plutôt faible, faible surtout par absence de vues d'ensemble, par absence de ces qualités que l'on aime à rencontrer chez les bons maîtres, chez ceux qui savent rapprocher des questions d'origines différentes, qui élèvent un sujet en le simplifiant. Ou bien ces vues d'ensemble font défaut, ou bien l'on croit présenter comme telles des connaissances supérieures, mais inutiles ou incomplètement comprises.

Espérons que cette faiblesse, qui est surtout celle de la majorité, mais non des meilleurs, aura eu comme principale conséquence d'écarter ceux qui, pour être des maîtres, ont encore besoin d'apprendre à réfléchir, de savoir que les résultats s'apprécient souvent mieux par la qualité des moyens mis à les obtenir que par leur exactitude intrinsèque.

Mathématiques spéciales (M. HENNEQUIN). — 91 candidats ont pris part à l'épreuve de Mathématiques spéciales, deux ont remis des copies blanches, dix-neuf ont obtenu des notes supérieures ou égales à 10, vingt-quatre des notés comprises entre 10 et 5, vingt-quatre des notes comprises entre 5 et 3, vingt-deux des notes inférieures à 3.

Les meilleures notes ont été $16 \frac{1}{2}$, 16, $15 \frac{3}{4}$, $15 \frac{1}{4}$, 15 ; viennent ensuite deux 14, deux $13 \frac{1}{2}$, quatre notes entre 12 et 13, deux entre 11 et 12, quatre entre 10 et 11.

Si l'on excepte les premières copies où les méthodes de la géométrie analytique sont judicieusement adaptées à la solution du problème, l'ensemble des copies, dont la note moyenne est 5,86 dénote moins une ignorance des programmes de mathématiques spéciales qu'une incapacité à plier les procédés généraux à la solution des questions particulières, moins l'insuffisance technique dans le calcul analytique que l'absence du souci, dont l'excès même paraîtrait naturel chez de futurs professeurs, de simplifier, de voir clair, de préciser et contrôler les résultats obtenus. Il est surprenant que des candidats à l'agrégation perdent si facilement de vue l'objet géométrique d'un problème et se bornent à poursuivre inlassablement des calculs vides de sens ; les résultats exacts eux-mêmes sont sou-

vent mal dégagés des calculs où ils apparaissent et leurs caractères géométriques ne sont pas mis en lumière ; dans ces conditions, le lien qui unit les diverses parties du problème échappe à la plupart des concurrents qui, perdant tout fil directeur, se voient rapidement arrêtés.

Il s'agissait, dans le problème proposé, d'étudier les cercles focaux C des paraboles d'un parabolôïde P dont les points de contact, avec P sont dans un plan donné perpendiculaire à l'axe et, parmi eux, les cercles Γ qui ont leurs centres sur un cercle.

Pour orienter les candidats dans la définition analytique des cercles et pour éclairer les recherches ultérieures, on demandait d'abord de montrer que ceux des cercles C dont le plan est parallèle à un plan fixe $mx - y = 0$ engendrent un ellipsoïde. en vertu des propriétés élémentaires de la parabole, le lieu des centres de tels cercles est une droite qui coupe oz orthogonalement ; trois des cercles sont une quadrique contenant l'ellipse (e) section de P par le plan $z - h = 0$ et le lieu est la quadrique inscrite dans P le long de (e) et passant par les points cycliques du plan $mx - y = 0$. Cette quadrique est un ellipsoïde réel E puisque la section par le plan principal perpendiculaire aux plans réels de sections cycliques est une ellipse réelle. La région formée par les cercles C qui ont un contact réel avec P est limitée par les deux cercles focaux qui sont tangents à (e). Les ombilics réels de E sont les points de contact de E avec les plans tangents parallèles à $mx \pm y = 0$, le même ellipsoïde étant, pour des raisons de symétrie évidentes, engendré par les cercles C dans les plans parallèles à $mx + y = 0$ et $mx - y = 0$. Ces ombilics sont les foyers des paraboles de P dont la directrice est dans le plan $z - h = 0$; le lieu Ω de ces ombilics, quand m et h varient, est celui des foyers des paraboles de P . Quand m varie seul, le lieu des ombilics est une biquadratique, intersection de deux quadriques tangentes en un point de l'axe oz , et, par conséquent, unicursale : on vérifie facilement que les projections de cette biquadratique sur xoz et yoz sont des coniques qui demeurent concentriques et homothétiques quand h varie.

A part quelques-uns qui substituent inconsciemment aux cercles C des cercles tout différents (rayon constant, diamètre suivant une corde de la parabole, axe coupant oz , etc....) les candidats forment exactement l'équation de E , mais beaucoup opèrent lourdement et maladroitement comme des débutants qui ignorent les faisceaux de coniques. Très peu donnent l'équation sous la forme $f + \lambda (z - h)^2 = 0$, précisant le contact de E et de P . Lorsqu'il faut déterminer les ombilics réels de E , le recours à l'équation en S est fréquent, certains accordent que les cercles utiles de E sont connus mais veulent « cependant rechercher les sections cycliques par une méthode directe » ; quelques-uns poussent plus loin l'amour du général et font appel aux formules $\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$, qui deviennent $r = t$, $s = 0$ dans une copie. Il n'y a pas lieu de s'étonner, dans ces conditions, que la moitié, à peine, des candidats donne des équations exactes de la biquadratique demandée, que les caractères de ses projections soient rare-

ment énoncés, qu'une douzaine de copies seulement établissent correctement l'unicursalité. Les conceptions de la plupart des candidats sur ce dernier point méritent une mention spéciale ; pour eux, les coordonnées d'un point d'une courbe unicursale sont des fonctions rationnelles de tout paramètre et, puisque x, y, z ne sont pas, dans le cas actuel, des fonctions rationnelles de m , ils affirment que la courbe n'est pas unicursale ; il s'en trouve un, par contre, qui constate que « x^2, y^2, z peuvent s'exprimer en fonction de $\sin^2 \theta$ » et en déduit que la courbe est unicursale ; un autre écrit : « Pour que ce soit unicursal (*sic*), il faut considérer seulement le cas de $y > 0$. »

L'identité des ombilics des ellipsoïdes E et des foyers des paraboles de P est rarement signalée ; un candidat, qui constate que ces ombilics sont des centres de cercles de rayon nul bitangents aux paraboles en conclut que leur lieu Ω est le « lieu des paraboles focales des paraboles de P ».

Les notes attribuées pour cette première partie sont : un 19 1/2, un 19, un 18 1/2, cinq 17 1/2 ou 17, quatre 16 1/2 ou 16, suivies de cinq notes supérieures ou égales à 15, vingt-sept de 15 à 10 et quarante-cinq inférieures à 10. La moyenne est 8,7.

La deuxième partie du problème consistait en la recherche du lieu Σ des centres des cercles C et la distinction sur Σ des centres des cercles réels et de ceux qui touchent P en des points réels. L'étude faite dans la première partie montrait que, pour m donné, le lieu des centres des cercles C est un diamètre de E coupant orthogonalement oz et que le lieu Σ est un conoïde droit d'axe oz admettant, en particulier, comme courbe directrice soit la biquadratique, lieu des ombilics des ellipsoïdes E, laquelle limite la région formée par les centres des cercles réels, soit la biquadratique, lieu des centres de courbure au sommet des paraboles tangentes à (e), laquelle limite la région formée par les centres des cercles qui touchent P en des points réels. Beaucoup de candidats forment facilement l'équation de Σ , en écrivant les équations du diamètre par rapport à E de la direction de plan $mx - y = 0$, mais, oublieux des résultats acquis, font de nouveaux calculs pour trouver les courbes séparatrices. La relation demandée entre les points M_1, M_2, M_3 de P, Ω, Σ sur une parallèle à oz n'est interprétée géométriquement que par trois candidats : il était pourtant bien simple d'observer que M_2 est le foyer d'une parabole de sommet M_1 et que M_3 est le point commun aux normales à cette parabole aux extrémités d'une corde dans le plan $z - h = 0$ en sorte que la propriété classique de la sous-normale donne la relation $\overline{HM_3} = 2\overline{M_1M_3}$, H étant le point de la droite $M_1M_2M_3$ de cote h . Il est à noter que plusieurs candidats qui avaient calculé les coordonnées $X(\theta, \lambda), Y(\theta, \lambda), Z(\theta, \lambda)$ du centre de C par rapport à des axes $oxyz$ variables avec θ ont cru définir le lieu Σ en éliminant θ et λ entre les relations formées. Pour cette partie, les notes sont : un 18 1/2, un 17, un 16 1/2, trois 16, cinq 15 ; suivent trente-trois notes supérieures ou égales à 10 et quarante-cinq inférieures à 10 ; la moyenne est 7,5.

La troisième question revenait à la détermination des cercles situés sur le conoïde Σ . Le plan d'un cercle de Σ , qui est une surface cubique, passe par une génératrice et sa direction est celle d'un plan de section cyclique du cône asymptotique du conoïde (après exclusion de $z = 0$) décomposé en les deux plans directeurs de P ; on obtient ainsi deux cercles réels sur Σ , tangents à xoz , symétriques l'un de l'autre par rapport à xoy ; un seul, γ , est dans la région $y > 0$, il est tangent à xoz au point A de cote $h + q$ sur oz et coupe yoz en un point K de cote $h + 2q$. Les plans des cercles C dont les centres décrivent une génératrice (g) du conoïde sont parallèles au plan diamétral de la direction de (g) par rapport à $x^2 + 2y^2 = 0$; la trace sur le plan de γ du plan du cercle Γ , de centre m , a donc une direction perpendiculaire à Am , c'est Km et le plan du cercle pivote autour de la parallèle KZ à oz . Les paraboles auxquelles les cercles Γ sont bitangents passent toutes par le point I de cote $\frac{q}{2}$ intersection de P et de KZ ; on voit facilement que I est un ombilic de P et que la puissance de I par rapport aux cercles Γ , qui sont des cercles focaux des paraboles de P passant par I, est égale au carré de la distance $\left| \frac{q}{2} - h \right|$ de I à la corde de contact, c'est-à-dire au plan $z - h = 0$. Le centre de la sphère qui contient Γ et son symétrique Γ' par rapport à yoz décrit la perpendiculaire en A au plan de γ et cette sphère, qui est orthogonale à une sphère fixe de centre I, appartient à un faisceau linéaire dont le cercle commun γ_1 est dans le plan tangent en I à P.

54 candidats abordent cette troisième partie. Au lieu de faire une recherche méthodique des cercles de Σ , un grand nombre d'entre eux se bornent à des essais hasardeux ; même, l'un d'eux, qui a fait correctement et rapidement la recherche, déclare que les calculs faits sont inutiles. Beaucoup éprouvent de la difficulté à exprimer qu'une conique est un cercle ; on apprend même que pour qu'une conique soit un cercle il suffit que le rapport des axes de la projection sur xoy , soit égal au cosinus de l'angle de son plan avec xoy . Les propriétés des cercles Γ ne figurent que dans un nombre infime de copies ; seuls les indiquent ceux qui savent s'aider de considérations géométriques. Les notes obtenues par ceux qui ont attaqué la question sont : deux 18, deux 17 1/2, deux 16, un 15, un 14, onze notes entre 14 et 10, 25 notes inférieures à 10. La moyenne tombe à 3,5.

La surface S lieu des cercles Γ , qui faisait l'objet de la quatrième question, est, d'après ce qui précède, une surface anallagmatique relativement au pôle I. Elle rentre dans la catégorie des surfaces anallagmatiques du quatrième degré, qui ont l'ombilicale comme ligne simple et un point double (ici le point I) en lequel le cône des tangentes (ici système de deux plans) est en même temps cône asymptotique. S est l'enveloppe des sphères s qui passent par les cercles Γ ; le lieu D des centres de ces sphères est en même temps le lieu des points communs aux normales à S en M et M' alignés avec I et l'enveloppe des plans médiateurs de MM' ; D est une surface réglée, lieu des axes des cercles Γ ; puisque ces axes ren-

contrent l'axe du cercle γ_1 et sont parallèles à xoy , D est un conoïde dont une directrice est le cercle γ qui coupe en A l'axe du conoïde.

Des 17 candidats qui essaient cette quatrième partie, cinq seulement forment correctement l'équation de S ; aucun n'indique exactement l'intersection complète de S et de P formée de l'ellipse (e) comptée deux fois, des génératrices à l'infini de P et d'un cercle de rayon nul de centre I ; trois reconnaissent l'identité du lieu et de l'enveloppe demandés avec le lieu des axes des cercles Γ . Les notes obtenues sont : un 16, un 12, un 10, un 9, deux 8 1/2, un 8, deux 7 et huit notes variant de 4 1/2 à 0.

La cinquième question comportait l'étude des biquadratiques B intersections de S et des sphères s et la détermination, qui en résultait, des lignes de S conjuguées en tous leurs points des cercles Γ par rapport aux lignes de courbure. Sans entrer dans le détail de la solution, indiquons simplement : 1) que le calcul et la géométrie montrent que les courbes B se projettent du point de vue I sur le plan de γ suivant des cercles passant par le point K commun à IZ et à γ ; 2) que, en un point M commun à B et Γ , non sur IZ, s et S sont tangentes et que les tangentes à leur intersection, tangentes à B et Γ en M, sont symétriques par rapport aux plans principaux de S, puisque s est une sphère ; 3) que les courbes cherchées sont projetées sur le plan de γ suivant des courbes dont la tangente ut en un point μ coupe la droite Ku sous un angle V double de l'angle de KA et de Ku ; ces courbes sont des lemniscates homothétiques de point double K.

Un seul candidat a tenté de résoudre cette question en faisant appel à la géométrie : il n'a pas caractérisé les cônes (I) qui forment un faisceau linéaire si Γ est fixé et un réseau linéaire lorsque Γ varie ; il a utilisé heureusement la propriété classique de l'inversion pour établir la conjugaison de Γ et de B par rapport aux lignes de courbure. La note 10 a été attribuée à cette dernière partie d'une copie qui aurait pu être la meilleure du concours si les premières questions avaient été moins négligées.

Calcul différentiel et intégral (M. GARNIER). — Le problème de Calcul différentiel et intégral se rattachait à la représentation conforme de l'espace de Lobatchefsky à trois dimensions sur le demi-espace de Poincaré ; il comportait quatre parties distinctes, qui pouvaient être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans la première partie, il s'agissait de déterminer les courbes extrémales de l'intégrale $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ appartenant, soit au demi-espace $z > 0$, soit à certaines surfaces de ce demi-espace. Cette partie de l'épreuve donne lieu à une double observation.

Tout d'abord, sur 89 copies remises, 31 trahissent une ignorance complète de la méthode à adopter pour la détermination des extrémales. C'est pourtant une des questions classiques du programme d'Analyse de la Licence ; elle est reprise sous une forme à peine différente en Mécanique rationnelle. Ajoutons enfin que la formation de l'équation d'Euler avait été inscrite explicitement au programme du concours actuel.

Dans tous les cas proposés la détermination des extrémales se ramenait aisément aux quadratures. Or, dans le troisième et le quatrième cas, ces quadratures n'ont été effectuées complètement que par un petit nombre de candidats (7, pour les extrémales appartenant à une sphère Π , 2 pour les extrémales appartenant à une sphère Σ). En grande majorité les candidats se sont montrés incapables de calculer correctement et jusqu'au bout une intégrale telle que

$$\int \frac{a \sin \theta d\theta}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2(1 - \sin \theta)^2 - \cos^2 \theta}}$$

L'insuffisance des candidats en cette matière nous paraît d'autant plus regrettable qu'aucune des deux questions précédentes ne devrait arrêter un bon élève de Spéciales. Cette même remarque peut être répétée d'ailleurs pour tout le reste de l'épreuve.

La seconde partie (calcul de la courbure non-euclidienne) comportait les vérifications successives de deux formules distinctes. La première d'entre elles a été obtenue par la plupart des candidats ; la seconde, au contraire, qui reposait sur l'emploi des formules de Frenet et des relations entre les neuf cosinus, n'a été traitée que dans deux copies. En particulier, les candidats semblent avoir oublié la relation qui rattache un mineur du déterminant des neuf cosinus à l'élément correspondant de ce même déterminant.

Les deux dernières parties de l'épreuve ont été encore plus faibles que les précédentes. En général les candidats se sont bornés à former l'équation différentielle des courbes planes à courbure non-euclidienne constante ; 7 seulement ont pu intégrer cette équation, qui était pourtant d'un type classique. Enfin, la vérification de la formule de la distance non-euclidienne n'a été obtenue que dans 7 copies également.

De la lecture des compositions se dégage constamment une impression monotone de calculs longs, maladroits, mal présentés et, en général, inachevés. Il ne semble pas qu'avant d'effectuer leurs opérations les candidats aient réfléchi aux propriétés géométriques qui pouvaient éclairer leurs calculs. Par exemple, dans la première partie, les propriétés d'une inversion signalée par l'énoncé permettaient d'établir que les extrémales sphériques étaient circulaires ; il était facile d'écrire l'équation de ces cercles, et l'on avait ainsi un moyen très simple de prévoir ou de vérifier le résultat des quadratures à effectuer. De même encore, dans la quatrième partie, l'analogie avec le problème classique d'une surface canal à dérivente plane fournissait immédiatement une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles (E) : elle permettait également de retrouver *a priori* l'équation précédente. Tous ces rapprochements ont échappé aux candidats.

Malgré l'indépendance mutuelle des différentes parties de l'épreuve, la moyenne des compositions n'atteint que 4,95. Les sept premières copies ont obtenu les notes 16 1/2, 14, 13, 12, 11, 10 1/2 et 10.

Mécanique rationnelle (M. PÉRÈS). — Le problème de Mécanique rationnelle comportait trois parties :

La première groupait un certain nombre de questions sur le mouvement d'une sphère au contact d'un plan horizontal rugueux. Le début était simple et nombre de candidats l'ont traité d'une façon satisfaisante. Dans la question suivante (β , choix des données initiales pour que, dans le mouvement sans glissement de la sphère, une tige qui lui est liée ne heurte pas le plan d'appui) il suffisait d'un peu d'à-propos pour aboutir rapidement. On sait en effet (et on avait pu le constater précédemment) que, par rapport à des axes de direction fixe issus du centre, le mouvement de la sphère est une rotation uniforme ; dans ces conditions tout revenait à assurer que les deux cercles, trajectoires des extrémités de la tige ne coupaient pas le plan d'appui et quelques remarques géométriques, ou, à défaut, quelques lignes de calcul achevaient la question. C'est ce que n'ont pas vu certains candidats qui ont dépensé, en longs calculs, une ingéniosité maladroite. Enfin, la réponse à la question γ (choc de l'extrémité de la tige sur le plan) résultait de l'application du théorème du moment cinétique. Il y a peu de chose à dire sur cette question, traitée correctement par bon nombre de concurrents et que d'autres agrémentent de fautes de calcul banales ou d'erreurs dans l'évaluation du moment cinétique. A propos de l'hypothèse, expressément spécifiée, que, dès le début du choc, tout contact cesse entre sphère et plan, nous noterons, une fois de plus, que quelques candidats ne lisent pas l'énoncé.

La seconde partie du problème concernait le mouvement relatif de la sphère lorsqu'on impose au plan d'appui un mouvement donné de translation. Il suffisait de reprendre les équations du début, en introduisant les forces d'inertie d'entraînement (sans se tromper de signe, autant que possible). Les notations posées dans l'énoncé (p, q, r , composantes de la rotation instantanée sur les axes fixes) imposaient d'ailleurs la marche à suivre et un peu de réflexion avant d'aligner des équations eût évité à certains d'introduire là des angles d'Euler qui n'ont pas simplifié leur tâche. Les questions de cinématique qui terminaient cette partie ont achevé le classement des bonnes solutions, assez nombreuses.

La troisième partie du problème était tout à fait indépendante (mouvement d'un disque qui roule et pivote sur un plan). Elle était, comme il convient, nettement plus difficile et trois candidats seulement sont arrivés correctement à prouver que l'intégration des équations dépendait de quadratures. D'autres concurrents, moins heureux, ont manifesté cependant des connaissances assez sûres et il a pu en être largement tenu compte.

Dans l'ensemble les très bonnes copies sont en moindre nombre qu'au concours précédent ; nous avons attribué une fois chacune des notes 17, 16, 14 $1/2$; mais douze copies s'échelonnent ensuite de 10 à 12 $1/2$, puis dix-neuf de 7 à 9 $1/2$. A l'autre bout de l'échelle 24 notes vont de $1/2$ à 4. La moyenne générale est de 6,14.

Epreuves orales (1)

Les épreuves orales se sont montrées faibles, comparées surtout à celles des années précédentes. Elles ne permettent de signaler aucune leçon entièrement satisfaisante ; beaucoup ne sont que passables ; sauf deux exceptions, chaque candidat fléchit dans l'une au moins de ses deux leçons.

Et d'abord trop de concurrents ne comprennent pas le sujet qui leur est proposé, ne prenant même pas le soin de le lire attentivement. C'est ainsi qu'une leçon « sur la construction d'une courbe en coordonnées polaires » se transforme en une autre sur toute la théorie des coordonnées polaires débutant par la définition de ces coordonnées. Une leçon de Cosmographie « sur le mouvement propre apparent du soleil sur la sphère céleste, et l'inégalité des jours et des nuits » comprend l'étude du mouvement elliptique du soleil. Les erreurs de cette nature sont communicatives : une leçon sur le calcul des fonctions symétriques « entières » des zéros d'un polynôme entier a été faite deux fois, et, deux fois, il a été démontré au début, sans doute parce qu'il en est ainsi dans un cours complet, que toute fonction symétrique rationnelle se met sous forme du quotient de deux fonctions symétriques entières.

Les candidats ne paraissent pas savoir que tout sujet est nécessairement limité ; il l'est matériellement d'abord, par le temps restreint qui peut lui être consacré, aussi bien dans la pratique de l'enseignement qu'avec l'horaire imposé aux candidats ; il l'est aussi en saine logique, car toute bonne leçon doit comprendre quelques exemples ou applications. Cette observation devrait arrêter des leçons touffues et trop chargées ; il ne s'agit pas de tout placer dans une leçon ; si un candidat doit parler des « courbes planes définies par l'expression des coordonnées d'un point en fonction d'un paramètre, de leur tracé numérique et d'exemples », il commet une extrême maladresse en donnant la démonstration des règles qui concernent la concavité et l'étude des branches infinies ; le terme d'exemples employé dans le texte n'est pas une simple superfétation ; deux ou trois exemples, bien choisis et complètement traités, peuvent à eux seuls constituer le développement complet de cette leçon.

Ces incompréhensions du sujet aboutissent à un défaut d'équilibre. Tantôt la leçon est trop chargée, comme certaine sur l'intégrale définie, dans laquelle, après avoir donné la définition abstraite, puis les propriétés, de l'intégrale, le candidat veut présenter encore, avec des applications, les principales méthodes d'intégration. Tantôt la leçon manque de substance ; c'est le cas du candidat qui, ayant à parler des « asymptotes des courbes $y = f(x)$ », expose d'abord, sans aucun exemple, une longue théorie dans laquelle il mentionne toutes les circonstances possibles, toutes les recherches à effectuer, et n'aboutit enfin qu'à des exemples frisant la banalité.

Le souci de bien limiter la leçon et de mettre en lumière les points essentiels est trop rare. Souvent les candidats retardent l'heure de la partie

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1930 peut être demandée en communication au Bureau (joindre 1 fr. en timbres-poste pour frais d'envoi).

capitale de l'exposé par des hors-d'œuvre trop longs ou trop lents ; ils surchargent leur leçon en indiquant des procédés intéressants, tels que ceux du calcul vectoriel dans l'étude de la concavité, mais en laissant ces procédés sans emploi.

L'absence d'observation fait que l'on passe à côté d'une idée essentielle sans en dégager toute l'importance : c'est toute la théorie de l'homographie sur une conique qui pourrait se déduire de la considération de faisceaux homographiques ayant leurs sommets sur la conique ; ce sont les propriétés du faisceau linéaire ponctuel qui seraient rattachées au théorème de Desargues. Dans l'étude des courbes unicursales du 3^e ordre, le candidat donne la condition générale d'alignement de trois points et n'en tire aucun parti ; il ne s'aperçoit pas, par exemple, qu'il peut en déduire immédiatement l'existence du point double qu'il a admise sans démonstration.

Parfois la forme est par trop négligée ; tel lit ses notes d'une manière abusive ; tel autre, en Descriptive, n'est nullement embarrassé par les figures grossièrement inexactes qu'il dessine. A signaler, en revanche, une leçon d'Elémentaires sur « les équations se ramenant au second degré », qui s'est fait apprécier par une richesse d'exemples numériques simples, bien composés, où toutes les solutions sont entières.

Enfin, il faut encore signaler, toujours trop fréquentes, de ces erreurs qui seraient à peine excusables chez de jeunes élèves ; erreurs sur l'équivalence des systèmes, à propos d'équations irrationnelles ou des relations entre éléments d'un triangle ; réciproques non établies et cependant utilisées ; conception inexacte de la notion de rabattement, opération qui n'est pas présentée comme effectuée toujours à propos d'une figure plane ; erreurs coutumières sur la notion de fraction irréductible, sur le théorème de Rouché pour un système de deux équations linéaires à deux inconnues, sur le retour de la fraction décimale périodique à la fraction génératrice, sur le développement d'une fonction en série de Mac-Laurin.

D'une façon générale, les leçons d'Elémentaires sont plus heureuses que celles de Spéciales ; onze notes au moins égales à 15 pour les premières, trois seulement pour les secondes ; moyenne de 12,3 pour celles-là, de 11,2 pour celles-ci. Deux candidats seulement ont obtenu deux notes franchement bonnes de 16 ou 17.

Epreuves pratiques

Épure (M. HENNEQUIN). — Le sujet proposé était l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plans principaux horizontal et de front avec un cône de révolution qui avait son axe de bout dans le plan principal horizontal du paraboloïde et était tangent au paraboloïde en un point de ce plan. En raison de la symétrie bien évidente, la projection horizontale de l'intersection était une ellipse homothétique de la projection de la section du cône par un plan directeur du paraboloïde. On constatait, en recherchant par exemple les axes d'une telle section que sa projection horizontale était un cercle, et l'on pouvait tracer exactement le cercle projection de l'inter-

section du cône et du paraboloidé ; dès lors la question était ramenée à l'intersection du cône et d'un cylindre de révolution à axe vertical.

26 candidats reconnaissent que la projection horizontale est une conique, mais deux seulement font un examen géométrique de cette conique et constatent que c'est un cercle ; huit autres, profitant de la simplicité des données, se bornent à former l'équation de cette projection et ne donnent aucune explication géométrique ; les derniers tracent plus ou moins exactement, par points et par tangentes, la conique qui devient une hyperbole dans une épure et une parabole dans une autre. Les tangentes au point double de l'intersection ne sont construites exactement que par cinq candidats et souvent en utilisant les indicatrices de Dupin du cône et du paraboloidé, alors que les sections du cône d'erreur par les plans directeurs du paraboloidé étaient des sections de Monge.

La représentation de la portion d'un cône solide placée d'un certain côté du paraboloidé est donnée exactement par huit candidats ; beaucoup négligent des arcs de contour apparent du paraboloidé intérieurs au cône.

Le solide étant éclairé par des rayons lumineux horizontaux parallèles on demandait les ombres produites sur sa surface. La direction des rayons était telle qu'il n'y avait pas d'ombre propre sur la surface du cône ; de plus, l'ombre propre du paraboloidé se trouvait sur la face intérieure au solide et, par conséquent, n'était pas à retenir. La séparatrice d'ombre était formée d'un arc de l'intersection et de la projection cylindrique de cet arc, parallèlement aux rayons lumineux, sur la portion de surface du paraboloidé limitant le solide ; cette dernière courbe pouvait se définir comme la symétrique (symétrie oblique relative à la direction des rayons lumineux) de l'arc d'intersection par rapport au plan diamétral de front des rayons lumineux dans le paraboloidé ; sa projection horizontale était un arc d'ellipse déduit d'un arc du cercle tracé par une symétrie oblique par rapport à la trace horizontale du plan diamétral. Des ombres ne figurent que sur sept épures et ne sont construites exactement que sur trois d'entre elles.

Les notes sont : un 17 1/2, un 17, un 14 1/2, un 14, un 13, deux 12 1/2, un 12, un 11, un 10, dix notes entre 10 et 5, dix inférieures à 5 ; la moyenne est 7.6. Trop de candidats paraissent ignorer complètement la géométrie descriptive.

Calcul numérique (M. GARNIER). — Les candidats avaient à résoudre une équation de la forme $\operatorname{tg} x = ax + b \sin x$, où a et b étaient deux constantes données ; on leur demandait d'abord de déterminer la racine x_1 comprise dans l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$, puis celle, x_2 , qui appartient à l'intervalle $(40\pi, 40\pi + \frac{\pi}{2})$.

Dans le premier cas les tables des valeurs naturelles des fonctions $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ montraient aisément que la racine x_1 est comprise entre $\frac{\pi}{200} \times 79$

et $\frac{\pi}{200} \times 80 = \frac{2\pi}{5}$, cette seconde valeur étant d'ailleurs la plus approchée. Il suffisait alors d'appliquer deux fois de suite la méthode de Newton à partir de $\frac{2\pi}{5}$ pour obtenir la racine cherchée avec toute l'approximation des tables à cinq décimales.

Cette méthode n'a été suivie que dans une seule copie ; les autres révèlent une ignorance plus ou moins complète des méthodes de résolution des équations numériques. Quelques candidats ont adopté la méthode d'itération, qui, pourtant, converge bien moins vite que la méthode de Newton. D'autres ont commencé par appliquer cette dernière méthode, mais ils l'ont ensuite abandonnée pour la méthode des parties proportionnelles, ou même pour des essais empiriques qu'ils n'ont pas hésité à déclarer plus précis que la méthode même. Beaucoup d'autres enfin se sont contentés de tâtonnements effectués au hasard ; malgré leurs multiples tentatives ils n'ont obtenu, le plus souvent, que des valeurs grossièrement approchées de x_1 .

La seconde racine, x_2 , qu'il s'agissait d'évaluer, était très voisine de $\frac{81\pi}{2}$ ce qui en rendait le calcul très simple. Il suffisait de poser $x = \frac{81\pi}{2} - y$ et la formule $\cot y = \frac{81\pi a}{2} + b$ fournissait y à $\frac{\pi}{200} \times 0,0001$ près. On pouvait encore calculer y au moyen d'un développement limité et ceci conduisait à une vérification de calcul intéressante, qui n'a été entrevue que dans une seule copie.

Les notes obtenues s'échelonnent de 3 à 19 avec une moyenne de 10.

Conclusions

Dans l'ensemble, le concours de 1930 reste assez terne. C'est l'impression qui se dégage de chacune des épreuves observée isolément, c'est celle qui apparaît lorsqu'on les rapproche. Ce concours n'a pas mis en évidence, ainsi qu'il l'avait fait les années précédentes, de ces sujets sans faiblesse, qui se montrent supérieurs dans toutes les épreuves du concours. A l'écrit, à part les deux premiers qui font exception, tous les candidats admissibles montrent quelque faiblesse, au moins avec une de leurs compositions cotée au-dessous de la moyenne, et souvent beaucoup au-dessous ; et quant aux deux premiers, dont les notes les plus faibles de l'écrit s'abaissent respectivement à 10 et 12, ils ont à leur tour leur défaillance aux épreuves orales avec une de leurs leçons.

Le nombre des candidats inscrits était de 101 ; c'est exactement le même, à une ou deux unités près, que celui des dernières années. De ces candidats, 7 n'ont pas pris part au concours, et 5 ont abandonné après une ou plusieurs compositions. 30 concurrents ont été retenus à l'admissibilité, le total de points nécessaire pour être admissible étant de 24,5, sensiblement le même que celui de l'an passé qui était de 24 ; mais le premier admissible ne se serait classé que troisième en 1929, son total de 57 points

le mettant en infériorité sensible par rapport aux deux premiers de 1929.

Même situation au classement définitif : les 19 agrégés de 1930 valent par leur moyenne générale, par leur total de points de 196 au minimum, les 18 premiers de la liste de 1929, qui en comprenait 20 ; alors que le premier agrégé de cette année n'aurait figuré qu'avec le n° 5 dans la liste de 1929, l'équilibre se rétablit immédiatement ensuite avec les six suivants, lesquels se seraient placés entre les n° 5 et 6 de 1929. Moins brillant, ce concours supporte donc cependant, dans l'ensemble, la comparaison avec les précédents, et, à ce titre, laisse néanmoins la même impression de sécurité.

Le Président du Jury,
A. TRESSE.
