DEUXIÈME PARTIE

Sur les directrices de l'hyperbole

Voici une petite note sur les directrices de l'hyperbole contenant une démonstration directe de la réciproque. Sans doute n'est-elle pas nouvelle, mais peut-être intéressera-t-elle certains collègues.

Soient F et F' les foyers de l'hyperbole (H) ; a et c ayant la signification habituelle, l'hyperbole est définie par

$$(1) \qquad \mathrm{MF'} - \mathrm{MF} = 2\varepsilon a$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que M appartient à la branche (F) ou à la branche (F').

Sur FF' et sur les parallèles à cette droite, prenons comme sens positif le sens de F' vers F.

Soit Δ l'axe radical du cercle directeur de centre F' et du cercle-point F ; comme F est extérieur au cercle directeur de centre F', F et F' sont de part et d'autre de Δ. Si H est la projection de M sur Δ

$$(2) \qquad \overline{\mathrm{MF'}}^2 - 4a^2 - \overline{\mathrm{MF}}^2 = 2\overline{\mathrm{F'F}} \,.\, \overline{\mathrm{HM}} = 4c\overline{\mathrm{HM}}$$

De (1) on tire $\quad \mathrm{MF'} = 2\varepsilon a + \mathrm{MF}$

ou, en portant dans (2)

$$(3) \qquad (\mathrm{MF} + 2\varepsilon a)^2 - 4a^2 - \overline{\mathrm{MF}}^2 = 4c\overline{\mathrm{HM}}$$

$$(4) \qquad 4\varepsilon a\mathrm{MF} = 4c\overline{\mathrm{HM}}$$

$$(5) \qquad \mathrm{MF} = \varepsilon\frac{c}{a}\overline{\mathrm{HM}}.$$

Réciproquement soit un point M tel que

$$\mathrm{MF} = \frac{c}{a}\mathrm{HM}.$$

Comme $c > a$, il y a de tels points des deux côtés de Δ. Si M et F sont du même côté de Δ, $\overline{\mathrm{HM}} > 0$ puisque Δ passe entre F et F' et que le sens positif est celui de F' vers F ; alors $\quad \mathrm{MF} = \frac{c}{a}\overline{\mathrm{HM}}.$

Si M et F sont de part et d'autre de Δ, $\quad \mathrm{HM} < 0, \quad \mathrm{MF} = -\frac{c}{a}\overline{\mathrm{HM}}.$

Donc $\quad \mathrm{MF} = \varepsilon\frac{c}{a}\overline{\mathrm{HM}}, \quad$ ε étant choisi de façon que le second membre soit positif.

La relation (5) étant vérifiée, il en est de même de la relation (3) qui lui est équivalente.

D'autre part (2) est vérifiée par un point quelconque du plan ; donc les longueurs (positives) MF et MF' vérifient la relation obtenue en retranchant membre à membre les relations (2) et (3), c'est-à-dire :

$$\overline{\mathrm{MF'}}^2 - (\mathrm{MF} + 2\varepsilon a)^2 = 0$$

ou : (6) $(\mathrm{MF'} + \mathrm{MF} + 2\varepsilon a)\ (\mathrm{MF'} - \mathrm{MF} - 2\varepsilon a) = 0.$

Or le triangle MFF' donnant $\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} \geqslant 2c > 2a$, le premier facteur ne peut s'annuler et la relation (6) équivaut à

$$\mathrm{MF'} - \mathrm{MF} = 2\varepsilon a.$$

Le point M appartient donc à l'hyperbole (H).

H. Armant,
Professeur au Collège de Meaux.