Sur la projection d'un angle droit sur un plan

Voici une mode d'exposition de cette question qui n'est peut-être pas inédit, mais qui est facile à retenir et qui permet de savoir si un angle droit augmente, ou diminue, ou conserve sa grandeur quand il est projeté orthogonalement.

I. Un angle CSB possède un côté SB parallèle à un plan P et SC est une des perpendiculaires menées par S à SB : cet angle se projette sur P suivant un angle *droit*. (Démonstration ordinaire).

II. Un angle droit CSB n'a aucun côté parallèle à P. Les côtés de l'angle percent le plan en C et en B, soit A la projection de S sur P, soit D la projection de S sur BC. Le plan CSB étant rabattu autour de CB (vers A), S se place en M sur le prolongement de DA, l'angle BAC est enveloppé par l'angle BMC, il est donc plus grand que lui, il est *obtus*.

III. Si on prolonge CS suivant SC', l'angle droit C'SB se projette suivant un angle supplémentaire de CAB, ce nouvel angle est donc *aigu*.

J'estime que le sujet est épuisé, je propose alors les exercices suivants :

I. Un triangle BSC a deux sommets B et C sur un plan P et S se projette en A sur ce plan. Dans le trièdre SABC on a, avec les notations d'usage :

si $\widehat{BSC}$ est droit, $\quad 0 = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$;

si $\widehat{BAC}$ est droit, $\quad \cos a = \cos b \cos c$.

II. On ne peut poser un triangle sur un trièdre trirectangle que si tous ses angles sont aigus : cette condition est suffisante.

III. Etant donné un triangle équilatéral ABC, montrer qu'il existe une infinité de triangles AB'C', rectangles en C' ou en B', tels que C' et B' se projettent orthogonalement en C et en B (C' et B' étant du même côté du plan ABC). Parmi ces triangles, il y en a pour lesquels les segments CC', BB' sont, ensemble, les plus petits possibles : alors l'angle des plans AB'C', ABC est déterminé par la formule $\cos \Theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

G. Maupin,
Professeur au Lycée de Bordeaux.