

DEUXIÈME PARTIE

Sur une propriété des quadriques réglées

Considérons un quadrilatère gauche ABCD, une droite EF qui s'appuie sur deux côtés opposés AB et CD, M et M' deux points quelconques de cette droite, Ma, Mb, Mc, Md et M'a', M'b', M'c', M'd' les distances de ces points aux plans des angles du quadrilatère ; nous pouvons écrire, en adoptant pour les signes les conventions habituelles,

$$\frac{\overline{Ma}}{\overline{M'a'}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{M'E}}, \quad \frac{\overline{Mc}}{\overline{M'c'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{M'F}}, \quad \frac{\overline{Mb}}{\overline{M'b'}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{M'E}}, \quad \frac{\overline{Md}}{\overline{M'd'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{M'F}};$$

par conséquent

$$\frac{\overline{Ma} \cdot \overline{Mc}}{\overline{Mb} \cdot \overline{Md}} = \frac{\overline{M'a'} \cdot \overline{M'c'}}{\overline{M'b'} \cdot \overline{M'd'}}.$$

Le rapport $\frac{\overline{Ma} \cdot \overline{Mc}}{\overline{Mb} \cdot \overline{Md}}$, qui conserve ainsi la même valeur quand M varie sur EF, ne change pas si le point se déplace sur la droite KML rencontrant AD et BC ; pas davantage si le point, quittant KL en N, parcourt la droite ENF' s'appuyant sur AB et CD ; on a donc ce théorème.

Si une quadrique contient les côtés d'un quadrilatère gauche, le rapport du produit des distances aux plans de deux angles opposés à celui des distances aux deux autres plans analogues est le même pour tous les points de la surface.

Etant donné un point quelconque M, il passe par ce point et par les côtés du quadrilatère une quadrique et une seule, laquelle correspond à la valeur $\frac{\overline{Ma} \cdot \overline{Mc}}{\overline{Mb} \cdot \overline{Md}}$ de la constante ; inversement, étant donné une

valeur k de cette constante, un point M, tel que $\frac{\overline{Ma} \cdot \overline{Mc}}{\overline{Mb} \cdot \overline{Md}} = k$, détermine la quadrique correspondant au nombre k .

Pour avoir la valeur de la constante relative au parabolôïde déterminé par le quadrilatère gauche, il suffit d'observer que cette surface passe par le centre des moyennes distances des sommets ; on trouve ainsi $k = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$, en appelant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les hauteurs du tétraèdre ABCD.

J. LEMAIRE.