

Sur un théorème de la divisibilité des polynômes

Voici une démonstration, qui n'est peut-être pas nouvelle, mais qui peut cependant intéresser certains collègues, du théorème suivant :

Un polynôme divisible par $(x - a)^\alpha, (x - b)^\beta, \dots, (x - l)^\lambda$, $a, b, c, \dots, l$, étant des nombres différents, est divisible par leur produit.

Supposons le théorème vrai dans le cas où le diviseur est de degré $n - 1$. Je démontre qu'il est encore vrai si le diviseur est de degré n .

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$$

Par hypothèse

$$P(x) = (x - a)^{\alpha-1} (x - b)^\beta (x - c)^\gamma \dots (x - l)^\lambda \varphi_1(x)$$

$$P(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^{\beta-1} (x - c)^\gamma \dots (x - l)^\lambda \varphi_2(x)$$

D'où l'on déduit

$$(x - a) P(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda \varphi_1(x)$$

$$(x - b) P(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda \varphi_2(x)$$

et en retranchant nombre à nombre

$$(a - b) P(x) = D \times (\varphi_2 - Q_1) \quad \text{C. q. f. d.}$$

Bien entendu, au point de vue pédagogique, il peut être intéressant de commencer par le cas des facteurs simples.

L. DREYFUS,

Professeur au Lycée de Poitiers.
