

Droite et plan perpendiculaires

Voici, en application du théorème de Stewart, un exercice, qui n'est peut-être pas nouveau, mais qu'il est intéressant de signaler :

A une droite OX, on mène deux perpendiculaires OY et OZ, et dans le plan YOZ on trace une droite OU. Démontrer que l'angle UOX est droit.

Soit une droite quelconque du plan YOZ qui rencontre OY en B, OZ en C et OU en D. Si l'on joint les points B, C et D à un point A de OX, on a, en appliquant la relation de Stewart dans les deux triangles BAC et BOC :

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{AD}^2 \cdot \overline{CB} + \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{CB} &= 0 \\ \overline{OC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{OB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{OD}^2 \cdot \overline{CB} + \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{CB} &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\overline{AC}^2 - \overline{OC}^2) \cdot \overline{BD} + (\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2) \cdot \overline{DC} + (\overline{AD}^2 - \overline{OD}^2) \cdot \overline{CB} = 0$$

ou encore :

$$\overline{AO}^2 \cdot (\overline{BD} + \overline{DC}) + (\overline{AD}^2 - \overline{OD}^2) \cdot \overline{CB} = 0$$

et enfin, puisque $\overline{BC} \neq 0$

$$\overline{AO}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{OD}^2.$$

Le triangle AOD est donc rectangle en O.

D'ailleurs, en construisant la droite BDC de façon que $BD = DC$, il suffit d'appliquer le théorème « de la médiane ».

G. MAUPIN

Professeur au Lycée de Bordeaux.
