

Sur le triangle ayant deux bissectrices intérieures égales

J'ai été amené récemment, pour le théorème : *Si deux bissectrices intérieures d'un triangle sont égales, le triangle est isocèle*, à une démonstration, qui n'est peut-être pas nouvelle, mais qui peut cependant intéresser certains collègues.

Soient égales, dans un triangle, les bissectrices des angles B et C. Les deux côtés AB et AC ne peuvent avoir des longueurs différentes : supposons par exemple $AC > AB$, et par suite $B > C$.

Une symétrie par rapport au milieu du côté BC fait correspondre au triangle ABC le triangle, A'CB, et à la bissectrice de l'angle ACB, la bissectrice BF de l'angle A'BC, bissectrice égale, par suite de l'hypothèse, à la bissectrice BE de l'angle ABC.

Dans les triangles CBE et CBF, BC est commun, $BE = BF$, $\widehat{EBC} > \widehat{FBC}$ (puisque ces angles sont respectivement égaux aux moitiés des angles B et C du triangle ABC) ; donc :

$$CE > CF \quad (1)$$

$$\text{D'autre part } \widehat{BEC} = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} \quad \widehat{BFC} = \hat{A}' + \frac{\hat{C}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\text{D'où } \widehat{BEC} > \widehat{BFC}$$

et en retranchant $\widehat{BEF} = \widehat{BFE}$ (le triangle BEF étant isocèle)

$$\widehat{CEF} > \widehat{CFE}$$

et par suite, dans le triangle EFC :

$$CF > CE \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) sont contradictoires, les longueurs des côtés AB et AC du triangle ABC ne peuvent être différentes.

L. GARNON,

Professeur au Lycée Condorcet.