
DEUXIÈME PARTIE

Propriétés angulaires d'un quadrilatère convexe dont les diagonales sont égales

Le cas du parallélogramme — et par suite du rectangle — étant écarté, on peut supposer que deux côtés opposés AA' et BB' du quadrilatère $ABB'A'$ se coupent en O . Soient AB' et BA' les diagonales égales.

Si AA' et BB' ont même longueur, les deux triangles $AA'B$, $BB'A$ sont égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun ; les triangles OAB , $OA'B'$ et le quadrilatère sont alors isocèles.

Laissons ce cas de côté provisoirement et supposons, par exemple $AA' > BB'$. Dans les deux triangles $AA'B$, $BB'A$ qui ont AB commun et $BA' = AB'$, des angles inégaux sont opposés aux troisièmes côtés et l'on a :

$$\widehat{B'AB} < \widehat{A'BA} \quad (1)$$

De la même manière, la comparaison des deux triangles $BA'B'$, $AB'A'$ donne :

$$\widehat{BA'B'} < \widehat{AB'A'} \quad (2)$$

Menons $\overline{BD} = \overline{B'A'}$, d'où résulte que le triangle $A'BD$ est isocèle. Dans le triangle $A'AD$, l'inégalité des côtés AA' et $AD = BB'$, entraîne celle des angles opposés et, par suite :

$$\widehat{AA'D} < \widehat{ADA'}$$

En ajoutant aux deux membres de cette inégalité les angles égaux $\widehat{DA'B}$ et $\widehat{A'DB}$, on obtient :

$$\widehat{AA'B} < \widehat{ADB}$$

et, à cause de l'égalité de $\widehat{ADB}$ et $\widehat{BB'A}$, il vient :

$$\widehat{AA'B} < \widehat{BB'A} \quad (3)$$

Les inégalités (2) et (3) étant de même sens, on n'en peut rien conclure pour les angles de sommet commun A' , qui figurent dans les premiers membres et les angles de sommet B' qui sont dans les seconds ; mais on obtient des inégalités de sens contraire en remplaçant dans (3), par exemple, les angles par leurs suppléments et l'on a :

$$\widehat{OA'B} > \widehat{OB'A} \quad (4)$$

En divisant (2) et (4) membre à membre, on obtient

$$\frac{\widehat{BA'B'}}{\widehat{OA'B}} < \frac{\widehat{AB'A'}}{\widehat{OB'A}} \quad \text{d'où l'on déduit aisément : } \frac{\widehat{BA'B'}}{\widehat{OA'B}} < \frac{\widehat{AB'A'}}{\widehat{OB'A}} \quad (5)$$

On obtiendrait l'inégalité contraire si l'on supposait $AA' < BB'$.

Par suite, l'égalité $\frac{\widehat{BA'B'}}{\widehat{OA'B}} = \frac{\widehat{AB'A'}}{\widehat{OB'A}}$ entraîne celle de AA' et BB'

et ramène au cas particulier envisagé tout d'abord.

L'application de l'inégalité (3) aux triangles IBB' et IAA' (I est le point de rencontre des diagonales) montre que l'on a :

$$\widehat{OAB} > \widehat{OBA'} \quad (6)$$

La division membre à membre des inégalités de sens contraires (1) et (6) donne :

$$\frac{\widehat{B'AB}}{\widehat{OAB}} < \frac{\widehat{A'BA}}{\widehat{OBA'}} \quad \text{d'où l'on déduit aisément : } \frac{\widehat{B'AB}}{\widehat{OAB}} < \frac{\widehat{A'BA}}{\widehat{OBA}} \quad (7)$$

On concluerait, comme précédemment, que l'égalité des deux membres entraîne celle de AA' et BB' et ramène au cas des figures isocèles.

On voit bien, d'après cela, comment l'égalité des bissectrices intérieures (AB' et BA' par exemple) du triangle OAB exige que ce triangle soit isocèle. Mais l'égalité des bissectrices extérieures du triangle $OA'B'$ ne peut être rattachée à l'inégalité (5) et par suite ne permet pas de conclure à un triangle isocèle. Une proposition analogue à celle qui vise les bissectrices intérieures serait la suivante : « Si les segments interceptés sur les symétriques des bissectrices intérieures relatives aux angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$, par rapport à AB , ont même longueur, le triangle OAB est isocèle ».

E. BLUTEL.