

**10. Rapport sur la composition de mathématiques  
(Classe de Première C-D)  
au Concours général des Lycées et Collèges en 1928**

Alors que l'année précédente, le Jury avait été unanime à se féliciter de la qualité remarquable du Concours, qu'il avait été frappé du grand nombre de compositions satisfaisantes comme de la maturité des premiers lauréats, il ne peut que déplorer la faiblesse du Concours de 1928.

Le sujet proposé (1) a été traité par 320 concurrents. Sur ce nombre, une première sélection n'a permis d'en retenir, avec beaucoup d'indulgence, que 32 ; et si, parmi ces derniers, le Jury a trouvé le contingent ordinaire de 13 lauréats, il n'a pas eu de regrets à abandonner les suivants. Les copies couronnées se suivent d'ailleurs de très près, présentant entre elles beaucoup d'analogies dans leurs faiblesses et leurs lacunes. La composition classée première a été loin d'épuiser le sujet proposé ; mais elle s'est nettement distinguée par sa netteté et sa précision ; tout ce qui est traité est exposé en excellents termes, dans une forme voisine de la perfection ; le Jury a été heureux de la distinguer nettement des autres compositions, généralement lourdes et pénibles, qui ont touché à plus de questions, mais dans des conditions insuffisantes, si ce n'est insignifiantes, ou même défectueuses.

L'objet de la question proposée était une étude élémentaire de la surface gauche de révolution, ses deux systèmes de génératrices, ses sphères inscrites. Bien entendu, le mot de surface gauche n'était pas prononcé dans le texte. Or, il a été constaté que certains élèves avaient certainement entendu parler de cette surface ; mais ceux-là n'ont pas su en tirer avantage ; bien au contraire, ils ont fait appel à leurs souvenirs plutôt qu'à leur propre jugement ; leurs pétitions de principe, leurs affirmations sont nombreuses, leurs raisonnements incomplets et souvent inintelligibles ; ces élèves ne comprennent pas ce qu'ils écrivent ; s'ils avaient fait œuvre personnelle, ils se seraient probablement mieux fait valoir.

Dans une première partie, on envisageait les symétriques  $D$  d'une droite fixe  $\Delta_0$  par rapport aux plans  $P$  menés par un axe fixe  $Z$  ; on demandait de montrer que les symétriques d'un même point de  $\Delta_0$  décrivent un cercle  $\Gamma$ , puis que les droites  $D$  font avec  $Z$  le même angle que  $\Delta_0$ , qu'elles ont avec  $Z$  la même plus courte distance, enfin qu'elles sont tangentes à une infinité de sphères  $S$ .

(1) Voir l'énoncé page 5 des Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1928

Ces diverses propriétés sont des conséquences immédiates de la symétrie, et cette première partie était considérée comme un préambule très facile, fait pour indiquer le chemin menant plus avant dans le domaine à explorer. Or, cette partie a arrêté le plus grand nombre des concurrents. Il semble que le mot de « symétrie », inscrit à leur programme, n'ait pour eux d'autre signification que sa définition, mais qu'il n'entraîne aucune conséquence ; le fait capital de l'égalité de deux éléments métriques symétriques leur échappe entièrement ; et cependant, leur attention sur ce point a dû être attirée à diverses reprises, ne serait-ce qu'à propos des trièdres symétriques, quand se présente la notion nouvelle d'orientation et son caractère différent des notions métriques. Alors qu'il suffisait de constater que  $Z$  est à elle-même sa symétrique, et  $D$  la symétrique de  $\Delta_0$ , pour en conclure, sans plus de discours, que  $Z$  et  $D$  ont une plus courte distance, un angle qui sont les mêmes que ceux de  $Z$  et  $\Delta_0$ , que la distance d'un point de  $Z$  à  $D$  est égale à sa distance à  $\Delta_0$ , le plus grand nombre des concurrents se sont perdus et se sont attardés dans des échafaudages pénibles de triangles égaux. S'ils savent ce que signifie la symétrie, ils ne se doutent pas qu'elle puisse être utilisée. L'erreur est de voir dans la Géométrie un ensemble de connaissances à acquérir et non un instrument que l'on apprend à manier.

Cette conception erronée développe une tendance à traiter isolément la moindre question, à en faire un îlot qui ne se rattache à aucune terre voisine. Ces élèves n'aperçoivent pas cet aspect intéressant des études géométriques, où des phénomènes variés se rapprochent les uns des autres en s'éclairant mutuellement. Ils répètent fidèlement des raisonnements qu'ils ont déjà développés ; pour déterminer le lieu des points de contact d'une même sphère  $S$  avec les droites  $D$ , il en est qui constatent bien qu'un tel point de contact est le symétrique du point de contact de  $\Delta_0$  avec la même sphère  $S$  ; le résultat doit donc être considéré comme acquis, puisque le lieu du symétrique d'un point de  $\Delta_0$  a été précédemment établi, et cependant la démonstration se répète. Les diverses parties du sujet se reliaient les unes aux autres, ainsi que nous allons l'exposer tout à l'heure ; certaines phrases du texte étaient même données pour provoquer ces liaisons ; mais ces lumières, placées pour éclairer la route, n'étaient pas aperçues, et nos concurrents n'y trouvaient qu'un problème de plus à résoudre.

Notons encore une autre faiblesse, déjà signalée l'année précédente. Nos élèves sont maladroits lorsqu'il s'agit de représenter une figure de l'espace ; si la disposition de leur dessin se présente mal, ils le conservent néanmoins, au lieu d'en tirer une indication qui leur suggère une disposition plus favorable. Pareillement, ils n'osent pas recourir à des projections bien choisies ; quelques-uns cependant ont bien su tirer parti, dès le début, d'une projection sur un plan perpendiculaire à l'axe  $Z$  ; que n'ont-ils eu la pensée d'utiliser davantage cette projection, principalement dans la seconde partie, ainsi que dans la quatrième ?

Dans cet ensemble trop terne, relevons cependant une qualité. La proportion des compositions franchement mauvaises, ou comportant de grossières fautes de raisonnement, s'est sensiblement abaissée ; peut-être ceci tient-il à ce fait que la première partie, tout en retenant trop longuement les concurrents, était néanmoins d'une essence facile. En fait de fautes graves, se reproduisant dans beaucoup de compositions, il n'en est guère que deux qui doivent être signalées. La première consiste à dire (nous sommes en Géométrie de l'espace) que le point B décrit un cercle sous cette seule raison que sa distance à un point fixe reste constante. La seconde est celle de ceux qui prétendent que deux droites, faisant le même angle avec un plan, font aussi le même angle avec toute droite de ce plan. Enfin, il est intéressant de relever une troisième faute, bien qu'elle n'ait été commise que par un seul, mais parce qu'elle est un exemple de ce que donne l'abus du mécanisme : pour établir que le lieu d'un point B est un cercle, la méthode, dit l'élève, est de démontrer que quatre points quelconques  $B_1, B_2, B_3, B_4$  de ce lieu sont sur un même cercle ; l'élève établit ensuite, correctement d'ailleurs, que le point  $B_1$  est sur le cercle de centre I et de rayon  $IA_0$  ; et de conclure en ces termes : la démonstration serait la même pour les points  $B_2, B_3, B_4$  ; la proposition est donc démontrée !

Ceci dit, nous allons passer en revue les diverses parties du sujet ; nous ne reviendrons pas sur la première partie, qui s'est trouvée être le morceau capital de la composition.

Dans la seconde partie, on envisageait un des cercles  $\Gamma$ , et deux droites particulières  $D_1, D_2$  de la première partie, puis les droites  $\Delta$  rencontrant ces trois lignes, et l'on proposait de « *montrer que par un point quelconque pris indifféremment sur l'une de ces trois lignes passe une droite  $\Delta$  et une seule, puis que ces droites  $\Delta$  possèdent, comme les droites  $D$ , les qualités énoncées au n° 1* ».

Cette dernière ligne est l'une de ces indications que n'ont pas aperçue les élèves. Il est naturel d'établir une même qualité par une même démonstration ; mais si une démonstration doit être identique à celle qui la précède, il n'y a pas lieu de la répéter, mais de constater seulement le retour des mêmes hypothèses. Il y avait donc là une suggestion qui indiquait de démontrer que les circonstances de la première partie se renouvelaient. En envisageant donc les symétriques  $\Delta$  de la droite  $D_1$  par rapport aux différents plans  $P$  menés par  $Z$ , il était établi, d'après la première partie, que toutes ces droites  $\Delta$  rencontrent  $\Gamma$  et  $D_1$ , et que, de plus, elles possèdent les qualités énoncées. La question est ainsi résolue immédiatement, sauf à justifier que ces droites  $\Delta$  rencontrent aussi  $D_2$ , ou encore qu'elles coïncident avec les droites  $\Delta'$  obtenues de la même manière en partant de  $D_2$ . C'était le point délicat ; quelques-uns y ont été conduits sans le voir clairement, et, *a fortiori*, sans le résoudre. La solution à laquelle s'attendait le Jury consistait à s'inspirer des méthodes de la Géométrie cotée et à projeter la figure sur le plan du cercle  $\Gamma$ . La coïnci-

dence apparaît alors de suite : les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  s'associent deux à deux, ayant deux points communs (de même projection et de même cote), l'un sur le cercle  $\Gamma$  supposé quelconque, l'autre sur celui des cercles  $\Gamma$  dont le rayon est minimum. Un autre procédé consiste à observer que chaque droite  $\Delta$  ou  $\Delta'$  s'obtient, à partir de  $\Delta_0$ , par deux symétries par rapport à deux plans menés par  $Z$ , donc par rotation autour de  $Z$  ; mais cette démonstration fait appel aux propriétés des rotations que ne connaissent pas encore les élèves de Première. En voici une troisième, qui était à leur portée. Toutes les droites  $\Delta$ ,  $\Delta'$ , ainsi que les droites  $D$  du n° 1, possèdent les qualités énoncées dans ce n° 1. Or, par un point de  $\Gamma$ , passent une droite  $\Delta$ , une droite  $\Delta'$ , et une droite  $D$ , et, d'autre part, par ce même point on ne peut mener, tangentielllement à la sphère  $S$  passant par ce point, que deux droites faisant l'angle donné avec  $Z$  ; sur les trois droites  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $D$ , il y en a donc deux qui se confondent, de sorte qu'il ne reste plus à établir que  $D$  ne peut se confondre ni avec  $\Delta$ , ni avec  $\Delta'$ . Mais, si  $D$  se confondait avec  $\Delta$ , par exemple, elle posséderait les qualités de celle-ci, d'être dans un même plan avec  $D_1$  sans se confondre avec elle, alors qu'il apparaît facilement, d'après le mode de génération des droites  $D$  étudié dans la première partie, que deux de ces droites ne peuvent être ni sécantes, ni parallèles.

Passons de suite à la quatrième et dernière partie, qui se rattache directement à la précédente. « On suppose que  $D$  et  $D'$  sont les symétriques de  $\Delta_0$  par rapport à deux plans rectangulaires  $P$  et  $P'$  menés par  $Z$  et que la sphère  $S$  est celle de rayon minimum. On considère toutes les droites rencontrant  $D$  et  $D'$  et tangentes à  $S$  ; il s'agit de montrer que ces droites comprennent les droites  $\Delta$  et une autre famille dont on cherchera le lieu du point de contact avec la sphère  $S$ . »

L'hypothèse particulière de l'orthogonalité des plans  $P$  et  $P'$  entraîne de suite que  $D$  et  $D'$  sont tangentes à  $S$  aux extrémités d'un même diamètre. Ce fait a bien été aperçu de quelques concurrents, mais sans qu'ils sachent en tirer parti. Or la conséquence en est que la figure est alors constituée avec deux droites quelconques  $D$ ,  $D'$  et la sphère  $S$  décrite sur leur perpendiculaire commune  $CC'$  comme diamètre. L'axe  $Z$  est une bissectrice, issue du milieu  $O$  de  $CC'$ , de l'angle formé par les parallèles à  $D$  et  $D'$ . De la deuxième partie résulte qu'il existe une série de droites s'appuyant sur  $D$  et  $D'$  et tangentes à  $S$  en un point variable du grand cercle de cette sphère dont le plan est perpendiculaire à  $Z$ . Or, rien ne distingue cette bissectrice  $Z$  de la seconde bissectrice  $Z_1$  du même angle ; à cette seconde bissectrice correspond donc une seconde famille de droites  $\Delta_1$ , tangentes à  $S$  en un point variable sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à  $Z_1$ . Il reste enfin à constater qu'il n'existe pas, en dehors des droites  $\Delta$  et  $\Delta_1$ , d'autres droites tangentes à  $S$  et s'appuyant sur  $D$  et  $D'$ , car, par tout point  $I$ , pris sur  $D$ , passent deux telles droites, intersections du plan mené par  $I$  et  $D'$  avec le cône circonscrit à  $S$  de sommet  $I$ , et deux seulement.

La troisième partie proposait de « calculer le rayon  $R$  d'une sphère  $S$  en fonction de la distance  $x$  de son centre au point  $O$ , et des constantes  $a$  et  $\alpha$  ». Puis, réciproquement, on se donne, « a priori, trois sphères  $\Sigma, \Sigma', S_1$  dont les centres sont alignés et dont les deux premières sont égales, et l'on demande de chercher, en calculant les constantes  $a$  et  $\alpha$ , s'il existe deux familles de droites  $D$  et  $\Delta$ , définies comme aux nos 1 et 2, tangentes à ces trois sphères ».

Le calcul, qui donne  $R^2 = a^2 + x^2 \sin^2 \alpha$ , est simple ; il a été réussi rapidement par les bons élèves ; les autres y sont arrivés par application copieuse du théorème de Pythagore. Ceci fait, les élèves s'engagent trop vite dans le calcul de la réciproque ; ils écrivent des équations, font des calculs, sans s'occuper de leur signification. Il y avait d'abord à déterminer la position du point  $O$  ; la considération de la formule précédente, donnant deux valeurs égales de  $R$  pour deux centres équidistants de  $O$ , plaçait immédiatement ce point  $O$  au milieu de la distance des centres des sphères égales données. Il y avait à observer et non à calculer. Or, les uns ont considéré le point  $O$  comme donné ; d'autres ne se sont pas aperçu qu'il y avait lieu de rechercher sa position ; quelques-uns l'ont fait à grand renfort de calculs. La même considération permettait de rétablir une symétrie entre les données que l'on pouvait regarder comme constituées par deux couples alignés de sphères égales et symétriques par rapport à un même point  $O$  :  $\Sigma, \Sigma'$  et  $S_1, S'_1$ . Ceci permettait de désigner par  $R$  le plus grand rayon, par  $R'$  le plus petit, par  $x$  et  $x'$  les distances respectives des centres au point  $O$  ; cela évitait de lourdes discussions envisageant plusieurs cas suivant l'ordre de grandeur de  $R$  et  $R'$ , les signes de  $x$  et  $x'$ . Le calcul donnait facilement :

$$\sin^2 \alpha = \frac{R^2 - R'^2}{x^2 - x'^2}, \quad a^2 = \frac{R'^2 x^2 - R^2 x'^2}{x^2 - x'^2},$$

(plusieurs n'ont pas vu que c'était  $a$  et  $\alpha$  qu'il s'agissait de calculer), puis les conditions :

$$0 < \sin^2 \alpha < 1, \quad a^2 > 0,$$

lesquelles, en vertu des remarques précédentes, se traduisent par

$$x^2 > x'^2, \quad x^2 > x'^2 + R^2 - R'^2, \quad x^2 > \frac{R^2 x'^2}{R'^2},$$

inégalités toutes résolues par rapport à  $x^2$  ; la première s'efface devant la troisième, dont elle est conséquence ; il y a donc lieu de distinguer deux cas, et deux cas seulement, suivant l'ordre de grandeur des deux limites trouvées (toujours positives), c'est-à-dire suivant le signe de la différence

$$x'^2 + R^2 - R'^2 - \frac{R^2 x'^2}{R'^2} = (R^2 - R'^2) \left(1 - \frac{x'^2}{R'^2}\right),$$

ou encore suivant que  $x'$  est inférieur ou supérieur à  $R'$ , soit enfin suivant que les petites sphères se coupent ou ne se coupent pas. Dans le premier cas, la seule condition de possibilité du problème est :

$$x^2 > x'^2 + R^2 - R'^2 ;$$

en l'écrivant (les élèves de Première ne connaissent pas la puissance d'un point par rapport à une sphère) :

$$R'^2 - x'^2 > R^2 - x^2,$$

elle signifie que les grandes sphères ou bien ne se coupent pas, ou bien se coupent suivant un cercle plus petit que les petites sphères. Dans le second cas, la seule condition est :

$$x^2 > \frac{R^2 x'^2}{R'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{R} > \frac{x'}{R'};$$

elle signifie que les grandes sphères se placent à l'intérieur du cône de sommet O, circonscrit aux petites sphères. Il y a deux cas limites intéressants, celui où toutes les sphères passent par un même cercle,

qui donne  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , auquel cas les droites D et  $\Delta$  se confondent toutes avec les tangentes à ce cercle, et celui où toutes les sphères sont inscrites dans un même cône, qui donne  $\alpha = 0$ , auquel cas les droites D et  $\Delta$  se confondent avec les génératrices de ce cône.

Cette discussion est à la portée de nos élèves de Première; mais les concurrents s'étaient attardés, et fatigués, sur la première ou les deux premières parties du problème.

*L'Inspecteur Général, Président du Jury de Correction,*  
A. TRESSE.