

9. Rapport sur la composition de mathématiques
(Classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1928

Les trois premières parties du problème de géométrie proposé (1) se rattachaient étroitement à la définition et aux propriétés du « produit scalaire » de deux vecteurs. Cette expression ne figurait pas dans le texte ; on avait craint, soit d'effaroucher les concurrents, soit de leur apporter une aide décevante en les orientant dans une voie qui leur fût peu familière.

Remarquons d'abord que si le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ est nettement défini, celui de deux segments AB et CD est susceptible de prendre deux valeurs opposées, $\pm AB \cdot CD \cdot \cos \theta$, θ désignant l'angle aigu des droites qui portent ces segments. Quand les deux segments ont une origine commune, il est naturel de prendre $AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{AB, AC})$ comme produit scalaire. Ce produit est la puissance du point A par rapport à une sphère de diamètre BC . De plus, on sait que si M est le milieu de BC , on a l'égalité :

$$\overline{BC} \cdot \text{proj}_{BC}(\vec{MA}) = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2},$$

qui identifie un produit scalaire à la demi-différence des carrés de deux segments. On pourra donc utiliser l'une ou l'autre expression : celle de produit scalaire simplifie le langage.

Quatre points A, B, C, D , étant pris, dans l'espace, dans l'ordre où ils sont énumérés, désignons respectivement par a, b, c, d , les longueurs AB, BC, CD, DA , supposés invariables. M désignant cette fois le milieu de BD , on conclut de l'égalité $\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MC}$ que le produit scalaire de $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ est égal à la somme des scalaires de $\vec{BD}$ et $\vec{AM}$ d'une part, de $\vec{BD}$ et $\vec{MC}$ d'autre part, c'est-à-dire de $\frac{\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2}{2}$ et $\frac{\overline{CB}^2 - \overline{CD}^2}{2}$. Par suite :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \frac{d^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Le produit scalaire des diagonales du quadrilatère $Q(A, B, C, D)$, plan ou gauche, reste donc invariable quand ce quadrilatère se déplace ou se déforme. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit nul est que l'on ait : $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ (1) AC et BD sont alors rectangulaires.

Si la condition (1) n'est pas réalisée, le signe du scalaire reste le même dans toutes les déformations et l'angle des demi-droites AC et BD reste aigu ou obtus.

Dès lors, si l'on mène par A , supposé fixe, deux vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ équipollents respectivement à $\vec{BD}$ et à $\vec{DB}$, les scalaires de AC et AI ,

(1) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1928*.

AC et AJ restent constants et opposés dans les déplacements et les déformations de Q compatibles avec la fixité du sommet A. Le point A a donc des puissances constantes et opposées par rapport aux sphères de diamètres respectifs CI et CJ. De ces deux sphères, l'une coupe orthogonalement une sphère Σ de centre A, l'autre coupe Σ suivant un grand cercle.

Dans le cas où Q est plan, les sphères sont remplacées par des cercles.

Enfin, l'égalité $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \frac{a^2 + d^2}{2}$ montre que, dans les

mêmes conditions, la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{\frac{a^2 + d^2}{2}}$ coupe la sphère de diamètre BD suivant un grand cercle. Cette propriété ne fait d'ailleurs intervenir que les deux côtés AB et AD du quadrilatère.

En se reportant à l'énoncé, on pourrait croire que l'essentiel des trois premières parties se retrouve dans ce court exposé. Ce serait certainement l'avis de la plupart des concurrents, si l'on en juge par le contenu de leurs copies. Il y manque en réalité une chose de grande importance, car l'existence d'un quadrilatère Q correspondant aux longueurs données a, b, c, d , n'y a pas été étudiée.

Si la relation (1) est vérifiée, il n'y a pas de doute à ce sujet. On peut réaliser une infinité de quadrilatères plans avec de telles données. Il suffit de tracer deux droites rectangulaires, portant les diagonales du quadrilatère cherché, de mettre en place le plus petit côté du quadrilatère, les côtés adjacents se plaçant naturellement et le côté opposé au premier, dans le quadrilatère ainsi défini, étant égal au quatrième côté donné, d'après la relation (1).

Il n'en est plus de même si a, b, c, d , sont donnés quelconques. On achève de définir la grandeur des deux triangles ABC, ADC, situés ou non dans un même plan, en se donnant la longueur l de la diagonale AC du quadrilatère inconnu. Pour que ces triangles existent, il faut et il suffit que l soit compris entre la plus petite des longueurs $a + b, c + d$, et la plus grande des longueurs $|a - b|$ et $|c - d|$. Si l'on suppose, par exemple, $a + b < c + d$, il en résulte $l \leq a + b$.

Si, en même temps, on a $|a - b| > |c - d|$, il faut que l'on ait $l \geq |a - b|$. l peut donc varier entre les limites $|a - b|$ et $a + b$ et, pour les valeurs extrêmes de l , le triangle ABC est aplati suivant la diagonale AC.

Au contraire, si l'on a $|a - b| < |c - d|$, l peut varier entre les deux limites $|c - d|$ et $a + b$, à condition que l'on ait $|c - d| < a + b$ et par suite, qu'un côté soit plus petit que la somme des trois autres. Cette fois, les deux triangles ABC et ACD peuvent s'aplatir successivement suivant AC.

Des considérations analogues s'obtiendraient avec les triangles ABD et CBD, et devraient être rapprochées des précédentes.

Quoi qu'il en soit, et sans entrer dans le détail des déformations continues de Q supposé plan — problème connu, sinon familier aux concurrents — il faut retenir que l ne peut varier qu'entre un minimum l_0 et un maximum l_1 , que Q soit plan ou gauche. De même, la projection de la seconde diagonale sur la première varie entre un maximum p_0 et un minimum p_1 correspondant respectivement à l_0 et à l_1 . Enfin, on pourrait échanger le rôle des deux diagonales dans ces conclusions. Il en résulte que la grandeur de Q supposé plan ne dépend que du paramètre l et que, s'il est gauche, elle dépend de l et de l'angle des deux plans ACB et ACD .

Ces observations faites sans autre intention que d'assurer les bases vont singulièrement faciliter la suite du problème.

Un moyen symétrique d'imposer au quadrilatère gauche Q une condition de grandeur indépendante des précédentes, est de fixer l'aire σ du quadrilatère q (parallélogramme) qui a pour sommets les milieux des côtés consécutifs de Q . Comme les côtés de q sont respectivement les moitiés des diagonales de Q , cette donnée nouvelle équivaut à la condition $ll' \sin \theta = 4\sigma$. En y joignant la relation

$$ll' \cos \theta = \frac{1}{2} |d^2 - a^2 + b^2 - c^2| \quad \text{on voit que } ll' \text{ et } \theta \text{ sont déterminés.}$$

La grandeur de Q dépend encore d'un paramètre : elle est définie si on se donne l par exemple.

Dans une quatrième partie, on supposait de plus que, A restant fixe, la droite AC se déplace dans un plan fixe Π auquel BD soit parallèle. AC ayant une position et une grandeur données, Q est défini en grandeur et en position (à une ambiguïté près). Imaginons que le point C se déplace sur une courbe Γ donnée. Les points I et J et le plan BCD dépendent d'un paramètre. Le lieu de ces points et l'enveloppe de la trace X du plan BCD sur le plan Π se déduisent simplement de la courbe Γ . En effet, I et J résultent de C par une inversion de pôle A et de puissance ll' , et une rotation d'un angle θ ou $\theta + \pi$, de sorte que leurs lieux respectifs sont des courbes inverses de Γ dans les conditions précitées. Toutefois, il est essentiel de remarquer que C ne peut décrire les arcs de Γ qui sont dans la couronne limitée par deux cercles de centre A et de rayons respectifs l_0 et l_1 ; une limitation correspondante s'en suit pour les lieux géométriques de I et de J .

La droite X est la parallèle à BD menée par C . Puisqu'elle fait avec AC un angle constant, la projection H du point A sur cette droite se déplace sur une courbe Γ' semblable à Γ , le centre de similitude étant A . X enveloppe l'antipodaire de A par rapport à Γ' . Ici encore, les déplacements de C et de X sont limités par les considérations précédentes.

Dans le problème proposé, Γ était une droite ou un cercle, ce qui permettait d'identifier l'enveloppe à des arcs de coniques.

Un autre moyen également symétrique d'imposer à Q une nouvelle condition de grandeur est de fixer la valeur V du volume du tétraèdre

ABCD. Si cette condition est remplie en même temps que la précédente, la formule $V = \frac{2}{3} \sigma h$, où h représente la plus courte distance de AC et BD, montre que h est constant. Q est défini en grandeur. On est ainsi conduit à la cinquième partie.

Soit Q_0 un quadrilatère satisfaisant aux conditions précitées. Tous ceux qui s'en déduisent par une rotation autour de l'axe Az du plan Π , mené par A, sont également des quadrilatères Q. Tout point remarquable, le centre de la sphère circonscrite à Q, par exemple, décrit un cercle dont l'axe est Az ; toute droite remarquable engendre un hyperboloïde ou un cône ou un cylindre de révolution dont l'axe est Az , ou enveloppe un cercle d'axe Az . Tout plan remarquable enveloppe un cône ou un cylindre de révolution dont l'axe est Az . Tous les résultats demandés dans la cinquième partie sont visés dans cette énumération.

Pour traiter complètement ce problème, il faudrait préciser la détermination des quadrilatères Q, quant à la grandeur, lorsqu'on donne a, b, c, d, σ et V , et par suite h . Si l'on remarque que la projection orthogonale de Q sur le plan Π est un quadrilatère Q_1 dont les côtés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont aussi mesurés respectivement par $\sqrt{a^2 - h^2}, \sqrt{b^2 - h^2}, \sqrt{c^2 - h^2}, \sqrt{d^2 - h^2}$, et que le parallélogramme q_1 relatif à Q_1 est identique au parallélogramme q , on voit que la question est ramenée à la suivante :

Déterminer la longueur l d'une diagonale A_1C_1 du quadrilatère plan Q_1 , connaissant les côtés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et l'aire σ du parallélogramme qui a pour sommets consécutifs les milieux correspondants des côtés de Q_1 . Une discussion s'en suit, quand σ varie, les autres grandeurs restant fixes.

La mise en équation du problème est sans difficulté. Si l'on remarque que l'aire σ est la moitié de l'aire de Q, quand ce quadrilatère est convexe ou simplement concave, on peut, en désignant par S_1 et S_2 les aires des deux triangles ABC, ADC, écrire les équations :

$$|S_1 \pm S_2| = S = 2\sigma$$

$$16S_1^2 = (l + a + b)(l + b - a)(l + a - b)(a + b - l) \\ = 2l^2(a^2 + b^2) - l^4 - (a^2 - b^2)^2 = U(l^2)$$

$$16S_2^2 = (l + c + d)(l + d - c)(l + c - d)(c + d - l) \\ = 2l^2(c^2 + d^2) - l^4 - (c^2 - d^2)^2 = V(l^2)$$

si bien que l'équation qui définit l est :

$$|\sqrt{U(l^2)} \pm \sqrt{V(l^2)}| = 8\sigma \quad (2)$$

Cette équation irrationnelle est équivalente à chacune des suivantes :

$$U(l^2) + V(l^2) - 64\sigma^2 = \mp 2\sqrt{U(l^2) \cdot V(l^2)} \quad (3)$$

$$[U(l^2) - V(l^2) - 64\sigma^2]^2 = 256\sigma^2 \cdot V(l^2) \quad (4)$$

$$[V(l^2) - U(l^2) - 64\sigma^2]^2 = 256\sigma^2 \cdot U(l^2) \quad (5)$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (3), ou mieux, en développant (4) ou (5), on constate que l est racine d'une équation

bicarrée. Toute valeur de l^2 racine de la résolvante, donne à $U(l^2)$ et $V(l^2)$ des valeurs positives pourvu que σ ne soit pas nul. En se reportant aux expressions de $U(l^2)$ et $V(l^2)$, on voit que cette valeur de l^2 est nécessairement positive. Par conséquent, à chaque racine de la résolvante correspond une valeur positive de l , et cette valeur attribuant le signe + aux produits qui constituent $U(l^2)$ et $V(l^2)$, les deux triangles de côtés respectifs a, b, l et c, d, l existent. On est donc amené simplement à écrire que la résolvante a des racines. La formation de son discriminant Δ est intéressante. On constate qu'il s'annule pour trois valeurs de σ^2 , correspondant respectivement à un quadrilatère Q_1 dont les diagonales sont parallèles ($\sigma = 0$), à un quadrilatère Q''_1 biconcave et inscriptible, à un quadrilatère Q'''_1 convexe et inscriptible. Mais si le dernier de ces quadrilatères existe toujours quand le plus grand côté est inférieur à la somme des trois autres, la discussion du signe de Δ montre que les deux premiers s'excluent en général, si bien que Q_1 peut se déformer en allant de Q'_1 à Q'''_1 , ou de Q'_1 à Q'''_1 . Le minimum de σ correspond donc soit à Q'_1 (il est alors nul), soit à Q''_1 , et le maximum à Q'''_1 , ce qui redonne un résultat classique.

Il serait également intéressant de déterminer la forme du quadrilatère qui correspond à une racine de la résolvante. L'équation (3) montre que si cette racine donne à $U(l^2) + V(l^2) - 4\sigma^2$ une valeur positive, les deux sommets B et D sont d'un même côté de AC; ils sont de côtés différents dans le cas contraire. Une étude conjuguée, portant sur la diagonale BD, montrera si A et C sont d'un même côté ou de côtés différents de BD. L'association de ces résultats permet de conclure que Q_1 est convexe, concave ou biconcave. Il va de soi que le passage d'une forme à une forme voisine s'effectue quand trois sommets s'alignent, c'est-à-dire que l'un des triangles constituant Q_1 s'applatit.

Cette discussion qui n'est qu'amorcée dépassait évidemment les moyens des concurrents et on ne l'attendait pas d'eux. La question avait été posée parce que c'était un prolongement naturel des précédentes, et comme un moyen de départager les meilleurs.

Tel est, dans ses grandes lignes, le sujet proposé aux efforts des 287 candidats qui ont pris part à l'épreuve. Voyons comment ils s'en sont tirés.

La sixième partie n'a pas joué un rôle important, car l'équation bicarrée n'a été obtenue que par un candidat. Les cinq premières ont donc servi au classement et les moyennes indiquées ci-dessous s'y rapportent.

Toutes les copies ont été lues d'abord par deux correcteurs; les notes qu'ils ont données avaient simplement pour but de préparer le classement définitif en écartant toutes les copies qui ne paraissaient avoir aucune chance d'être récompensées. Ces notes donnent néanmoins une idée nette de la valeur générale de l'épreuve.

11 copies blanches ou nulles étant mises de côté, on trouve 20 notes

au-dessous de 2, 74 de 2 à 4, 51 de 4 à 6, 49 de 6 à 8, 23 de 8 à 10, 27 de 10 à 12, 23 de 12 à 14, 6 de 14 à 16 et 3 de 16 à 16,5, ce qui porte la moyenne générale à 6,13.

En fait, 22 copies ayant au moins une moyenne de 12,6 ont été retenues et revues par tous les correcteurs. Les 13 copies récompensées ont obtenu les notes définitives suivantes :

Prix : 16,7 ; 16,16 et 15,7.

Accessits : 14,4 ; 14,16 ; 14,16 ; 14,12 ; 14 ; 13,52 ; 13,28 ; 13,2 ; 12,96 et 12,2.

On ne pouvait espérer un échelonnement plus régulier.

La présentation a joué un rôle important dans le classement, les cinq premières parties du problème ayant été traitées dans presque toutes les copies primées et quatre au moins ayant été abordées dans les neuf suivantes. La tâche des correcteurs a donc présenté de réelles difficultés. L'unanimité à laquelle ils sont arrivés pour désigner les prix, dans l'ordre définitif, est un sûr garant de la précision du jugement qu'ils ont porté.

La copie classée en première ligne se lit avec plaisir. L'auteur ne manque ni d'ingéniosité, ni de souplesse ; on voudrait lui voir parfois plus de puissance.

La seconde se fait remarquer par la sobriété et la précision de la rédaction, par la logique des développements.

Le souci de marcher à la découverte caractérise la troisième ; un manque de sûreté dans les détails en diminue la valeur.

La copie n° 4 semble n'avoir pas donné la mesure de celui qui l'a rédigée. D'une logique impeccable et d'une grande précision, sur presque tous les points, elle s'est ressentie d'un manque de vision dans la troisième partie. Elle est la première où apparaisse le souci de limiter les lieux géométriques et partage ce caractère avec la copie classée 8^e.

La prolixité n'est pas rare. Une sobriété touchant à la sécheresse est fréquente ; en voici un exemple tiré de l'une des copies retenues, mais non récompensées : « On pourra évidemment recommencer le même raisonnement pour un quadrilatère gauche, à condition de remplacer le mot cercle par le mot sphère » est tout ce qu'on y trouve comme réponse à la question posée dans la troisième partie du problème. Ces deux lignes n'ont pas dû contribuer beaucoup à relever la note de la copie.

La tenue matérielle des copies est assez bonne en général. L'orthographe laisse peu à désirer. Sur ce terrain, un exemple fâcheux a été donné par un concurrent dont la copie a été récompensée à d'autres titres : « supérieure, ... en projetant, ... compris, ... » pourraient laisser croire qu'il est ami des répétitions, mais « obtu, ... l'air de ce quadrilatère, ... » montrent qu'il sait se restreindre à l'occasion. Il serait cruel d'indiquer son classement ; mais, si ces lignes lui tombent sous ses yeux, il se reconnaîtra aisément.

Par leur rareté, des tares de cette nature permettent de reconnaître

la valeur de l'ensemble. Les résultats de l'épreuve sont tels qu'on puisse se déclarer satisfait du niveau atteint par l'enseignement de la géométrie dans les classes de mathématiques de nos lycées et collèges.

L'Inspecteur général, Président du Jury de Correction,

E. BLUTEL.