V. Documents officiels

12. Rapport sur le Concours, en 1927, de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)

Epreuves écrites (2)

L'augmentation du nombre des candidats, par rapport au concours précédent, est sensible : 84 inscrits l'an dernier, 99 cette année. Il est vrai que la différence est moins grande si l'on considère ceux qui ont pris part à la première composition, soit 82 et 92 respectivement.

Une autre particularité mérite examen. En 1926, quatre candidats seulement avaient lâché pied au cours des épreuves ; cette continuité dans l'effort avait été remarquée et avait fait l'objet d'une observation élogieuse, insérée au rapport. En 1927, dix-neuf candidats ont perdu courage et 73 seulement se sont présentés à l'épreuve de mécanique. La cause principale de telles défaillances est sans conteste l'insuffisance de préparation de la plupart de ceux qui se sont retirés peu à peu. Pour un très petit nombre, un effet de surprise, une défiance de soi en présence de questions auxquelles on ne se croyait pas préparé, sont les raisons probables de ce manque de persévérance. Ceux qui en ont été les victimes ont eu bien tort de se laisser aller.

Les rapports spéciaux des correcteurs apportent à ce sujet les précisions désirables.

Mathématiques élémentaires (M. CHENEVIER). — « Sur 92 copies, 2 seulement ont des notes supérieures à 10 : l'une est cotée 13,5, l'autre 11,5 ; 3 sont cotées de 8 à 10 ; 13 atteignent ou dépassent 5 sans atteindre 8 ; 74 ont des notes inférieures à 5, l'une de ces copies étant blanche. La moyenne générale de l'épreuve est 3,52. Le résultat est donc nettement insuffisant.

Le sujet proposé comportait un problème de trigonométrie et d'arithmétique et un problème de géométrie distinct du précédent.

Le premier problème n'a pas été abordé dans 9 copies. L'examen des 83 autres copies donne encore 4 zéros, 51 notes non nulles inférieures à 5, 22 notes supérieures à 5 et au-dessous de 10, 5 notes de 10 à 13 et une note 17,5.

On proposait aux candidats le calcul des angles d'un triangle dont on donnait la hauteur AH, la bissectrice intérieure AD et la médiane AM. Il était facile de former les trois équations aux inconnues A, B, C. La longueur HM étant connue, le second théorème de la médiane fournissait une équation dans laquelle, après des transformations rapides, il ne subsistait que les données et les angles ; le triangle rectangle AHD donnait une équation très simple et la relation $A + B + C = 180°$ achevait la mise en équations.

(1) Le jury était composé de MM. BLUTEL, inspecteur général président ; TRESSE, inspecteur général, vice-président ; CHATELET, recteur de l'Université de Lille ; FATOU, astronome-adjoint à l'Observatoire ; CHENEVIER, professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis.

(2) Voir les énoncés pages 10 et suivantes des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1927*.

Certains candidats ont fait preuve, dans ce début, d'une maladresse rare. Ils ont écrit toutes les équations qu'ils connaissaient dans un triangle et ont essayé ensuite d'éliminer les inconnues encombrantes. Ils ont commis — et c'est naturel — d'autant plus de fautes que leurs calculs étaient plus lourds. Un d'entre eux a écrit 12 équations et a borné là son effort. Un candidat a écrit, comme relations distinctes : $A + B + C = 180°$ et $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$, sans penser qu'il n'existe qu'une seule relation entre les trois angles. D'une manière générale, cette mise en équations révèle un défaut d'entraînement dans l'utilisation des formules trigonométriques et trop souvent un manque de logique regrettable.

La résolution des équations obtenues est inexistante dans un trop grand nombre de copies. Plusieurs candidats ont été jusqu'à écrire que le problème étant mis en équations, il était théoriquement résolu. On pourrait aller loin dans cette voie. La résolution, quand elle est entreprise, n'est pas poussée jusqu'au bout. On ne va pas jusqu'à l'expression des angles A, B et C au moyen d'angles auxiliaires fournis par les tables quand les calculs indiqués seront effectués sur un exemple numérique et cette omission prépare mal la discussion.

La discussion n'est faite jusqu'au bout que dans trois copies. Le mieux est, évidemment, d'écrire que les valeurs de A, B, C sont positives et d'en déduire les conditions $h < d < m$. On aurait admis la marche inverse, pourvu que les candidats aient pris soin de démontrer que, sous ces conditions, évidentes géométriquement, les calculs indiqués ne conduisaient à aucune impossibilité. Un candidat a dit que la discussion se ferait facilement. Pourquoi ne l'a-t-il pas faite ?

Pour tout ce début de trigonométrie, les notes sont : un 20, quatre de 14 à 16, cinq de 10 à 15, toutes les autres au-dessous de 10, dont 11 zéros, sans compter les neuf copies dans lesquelles ce problème n'est pas traité.

Le cas où le triangle est rectangle en A fournissait une relation simple donnant m en fonction rationnelle de h et d. Cette relation a été obtenue plus ou moins élégamment dans 62 copies. On a bien établi qu'elle était nécessaire ; personne n'a fait remarquer qu'elle était suffisante.

Notons, à ce sujet, que trop de candidats ayant trouvé la relation $m^2 = \dfrac{h^2d^4}{(2h^2 - d^2)^2}$ en concluent $m = \dfrac{hd^2}{2h^2 - d^2}$ sans une explication sur le signe de $2h^2 - d^2$.

Enfin la rédaction de certaines copies laisse des doutes sur la compréhension du mot « commensurable » par leurs auteurs. Dans d'autres, le mot médiane désigne d'abord la longueur, puis, sans transition, la mesure de cette longueur avec une unité non fixée. La précision du langage doit être la première qualité d'un professeur de mathématiques.

On demandait ensuite l'étude des solutions entières de la relation précédente. Une analyse facile permettait de se borner à des solutions premières entre elles dans leur ensemble et on était conduit à envisager deux cas, caractérisés chacun par la parité du nombre d. Cette recherche n'a été faite que dans 20 copies. Les notes obtenues sont trois 18, deux 16, un 15, toutes les autres au-dessous de 10.

Le cas où h et d étaient premiers entre eux conduisait à la résolution en nombres entiers de l'équation $2x^2 - y^2 = \pm 1$. Les candidats n'avaient pas à procéder à l'étude complète de ces équations. On aurait été heureux de trouver, dans les meilleures copies, des solutions déduites d'une solution évidente. On ne demandait pas de démontrer que toutes les solutions dérivent de la solution fondamentale. 9 candidats ont abordé cette partie et ont obtenu trois 12 et des notes au-dessous de 6.

Enfin, on demandait les modifications que subissaient les résultats précédents quand on substituait la bissectrice extérieure à la bissectrice intérieure. Les cinq candidats qui ont abordé cette question ont fourni des renseignements bien insuffisants. L'un propose de changer m en $-m$, l'autre h en $-h$, ce qui paraît inquiétant dans un triangle. Aucune copie ne formule un résultat précis.

Le problème de géométrie n'a pas été abordé dans 7 copies. Deux autres qui contiennent une rédaction insignifiante ont été cotées 0. 62 notes vont de 0,5 à 4,5, 14 de 5 à 7, 4 de 8,5 à 9,5 et les meilleures sont un 10 et deux 12. La moyenne est 3,18, un peu inférieure à celle du premier problème qui est de 3,87.

Dans une première partie, un point ω' était déduit d'un point ω par une homothétie et une symétrie. Il en résultait que si ω décrivait une droite δ, ω' décrivait une droite δ' qu'il était aisé de construire. La droite $\omega\omega'$ enveloppait une parabole dont on avait facilement le foyer et la directrice. D'après leurs copies, tous les candidats, sauf un qui a eu pour cette partie la note 20, ignorent que, pour conclure à l'existence d'une homothétie, on doit se préoccuper des signes des rayons vecteurs. C'est là une faute générale. On trouve dans certaines copies des affirmations qui déconcertent. Un candidat écrit que la correspondance fait partie du groupe des inversions ; un autre conclut que ω et ω' sont inverses par rapport à un point O qui n'est pas sur la droite $\omega\omega'$; un troisième constate que ω et ω' se correspondent d'une manière biunivoque et en déduit que la correspondance étant une homographie, le lieu de ω' est la transformée homographique du lieu de ω, c'est-à-dire une droite. Pour un autre δ et δ' sont liées par une homologie. Un candidat affirme qu'il faut que ω' décrive une droite.

Presque tous disent que $\omega\omega'$ enveloppe une parabole et beaucoup le démontrent ; mais peu en précisent le foyer et la directrice. On abuse encore des constructions dites bien faciles et non faites.

Pour cette partie du problème, on trouve une note 20, trois notes 16, dix notes entre 12 et 16, dix-neuf notes entre 8 et 12, trente entre 4 et 8 et dix-sept au-dessous de 4 ; il y a enfin 12 zéros.

La seconde partie reposait sur la considération d'une des paraboles précédentes. On demandait de prouver l'existence d'une droite δ et premières entre elles dans leur ensemble et on était conduit à envisager deux cas, caractérisés chacun par la parité du nombre d. Cette recherche n'a été faite que dans 20 copies. Les notes obtenues sont trois 18, deux 16, un 15, toutes les autres au-dessous de 10.

Le cas où h et d étaient premiers entre eux conduisait à la résolution en nombres entiers de l'équation $2x^2 - y^2 = \pm 1$. Les candidats n'avaient pas à procéder à l'étude complète de ces équations. On aurait été heureux de trouver, dans les meilleures copies, des solutions déduites d'une solution évidente. On ne demandait pas de démontrer que toutes les solutions dérivent de la solution fondamentale. 9 candidats ont abordé cette partie et ont obtenu trois 12 et des notes au-dessous de 6.

Enfin, on demandait les modifications que subissaient les résultats précédents quand on substituait la bissectrice extérieure à la bissectrice intérieure. Les cinq candidats qui ont abordé cette question ont fourni des renseignements bien insuffisants. L'un propose de changer m en $-m$, l'autre h en $-h$, ce qui paraît inquiétant dans un triangle. Aucune copie ne formule un résultat précis.

Le problème de géométrie n'a pas été abordé dans 7 copies. Deux autres qui contiennent une rédaction insignifiante ont été cotées 0. 62 notes vont de 0,5 à 4,5, 14 de 5 à 7, 4 de 8,5 à 9,5 et les meilleures sont un 10 et deux 12. La moyenne est 3,18, un peu inférieure à celle du premier problème qui est de 3,87.

Dans une première partie, un point ω' était déduit d'un point ω par une homothétie et une symétrie. Il en résultait que si ω décrivait une droite δ, ω' décrivait une droite δ' qu'il était aisé de construire. La droite $\omega\omega'$ enveloppait une parabole dont on avait facilement le foyer et la directrice. D'après leurs copies, tous les candidats, sauf un qui a eu pour cette partie la note 20, ignorent que, pour conclure à l'existence d'une homothétie, on doit se préoccuper des signes des rayons vecteurs. C'est là une faute générale. On trouve dans certaines copies des affirmations qui déconcertent. Un candidat écrit que la correspondance fait partie du groupe des inversions ; un autre conclut que ω et ω' sont inverses par rapport à un point O qui n'est pas sur la droite $\omega\omega'$; un troisième constate que ω et ω' se correspondent d'une manière biunivoque et en déduit que la correspondance étant une homographie, le lieu de ω' est la transformée homographique du lieu de ω, c'est-à-dire une droite. Pour un autre δ et δ' sont liées par une homologie. Un candidat affirme qu'il faut que ω' décrive une droite.

Presque tous disent que $\omega\omega'$ enveloppe une parabole et beaucoup le démontrent ; mais peu en précisent le foyer et la directrice. On abuse encore des constructions dites bien faciles et non faites.

Pour cette partie du problème, on trouve une note 20, trois notes 16, dix notes entre 12 et 16, dix-neuf notes entre 8 et 12, trente entre 4 et 8 et dix-sept au-dessous de 4 ; il y a enfin 12 zéros.

La seconde partie reposait sur la considération d'une des paraboles précédentes. On demandait de prouver l'existence d'une droite δ et d'une droite δ' associée quand le rapport de l'homothétie fondamentale était fixé et de trouver le lieu du point commun à ces droites quand le rapport variait. La première de ces questions est passée sous silence par tous les candidats sauf un. La deuxième question, facile, n'est résolue avec précision que dans peu de copies. Le lieu cherché était la polaire du point O par rapport à la parabole P. Les notes attribuées pour cette seconde partie sont un 18, deux 13, quatorze notes au-dessous de 10 et 75 zéros.

Dans une troisième partie, on considérait deux droites fixes Δ et Δ', une droite variable qui les coupait en A et A' de manière à former un triangle d'aire constante ou de périmètre constant. Dans les deux cas, les cercles de diamètre AA' sont orthogonaux à un cercle fixe. Aucun des candidats, sauf peut-être un, n'a remarqué que, dans le premier cas, les cercles envisagés se partageaient en deux familles suivant que l'angle en O du triangle correspondant était aigu ou obtus, que, pour l'une de ces familles, le cercle orthogonal était réel et que, pour l'autre, le cercle orthogonal était imaginaire de telle sorte que les cercles variables coupaient le premier cercle trouvé en deux arcs égaux. Dans le deuxième cas, on trouvait, pour une raison analogue, quatre familles de cercles correspondant aux quatre arcs de cercle enveloppes de la droite AA'. Sur 47 copies qui traitent cette partie du problème, trois ont la note 10 ; toutes les autres ont des notes inférieures à 10.

Enfin, dans une quatrième partie, on supposait qu'une droite BB' homologue de AA' dans la transformation du début, passait par un point fixe P'. Il en résultait que AA' passait par l'homologue P de P' et que les cercles de diamètres respectifs AA' et BB' étaient orthogonaux à deux cercles fixes de centres homologues Q et Q'. La construction de ces points mettait en évidence le parallélogramme OQP'Q'. On en déduisait que P' décrivait une ellipse quand Q ou Q' décrivait un cercle de centre O. Douze candidats ont abordé cette partie et n'ont pas dépassé la construction du point Q. Leurs notes sont inférieures à 10.

Dans ces deux dernières parties, on trouve encore des affirmations contestables. Un candidat étudie des cercles qui lui paraissent dépendre de deux paramètres. Il en conclut que ces cercles forment un réseau linéaire et que, d'après un théorème bien connu, l'existence du cercle orthogonal s'en déduit. Un autre annonce que deux droites de la figure ayant des points pour enveloppe, il pressent que les autres enveloppes seront peut être aussi des points. D'après un théorème, bien connu de celui qui le cite, un triangle qui reste semblable à lui-même et dont un sommet décrit une droite est tel que le pied de la hauteur décrit aussi une droite. Pour un autre candidat, si un triangle reste semblable à lui-même et si deux sommets décrivent des droites, le troisième sommet décrit aussi une droite. Si les auteurs de pareilles fautes cherchaient davantage à étudier la figure qu'on leur propose et moins à appliquer au hasard les vagues souvenirs d'une mémoire défaillante, ils s'apercevraient rapidement des sécurités que leur assure l'application d'une méthode logique.

Certaines copies ont une forme lamentable. Les figures qui, d'après les instructions, devraient être faites à la règle et au compas, sont souvent informes et illisibles. Il a été tenu compte de la forme dans l'attribution des notes. »

Mathématiques spéciales (M. Tresse). — « Le sujet consistait dans l'étude d'un complexe, celui des droites telles que chacune d'elles soit l'axe central d'un complexe linéaire auquel appartiennent deux droites fixes données D, D'. Les expressions de « complexe linéaire », d' « axe central », ont certainement surpris la plupart des candidats ; elles en ont paralysé un grand nombre. La question semble peu connue, ou même ignorée. Il n'en est cependant pas qui réapparaisse plus souvent peut être, aux divers stades de la préparation demandée aux candidats. Dès la classe de Mathématiques, dans celle de Spéciales, les programmes comportent l'étude des systèmes de vecteurs, des systèmes de forces appliquées à un corps solide. Un maître pourra-t-il enseigner avec fruit cette théorie, si, ne dominant pas la question, il ne sait pas que les droites de moment nul par rapport à ce système forment un complexe linéaire ? A propos de l'équilibre d'un corps solide ayant un axe fixe, comment pourra-t-il exercer ses élèves, s'il ne sait que, pour un système donné de forces directement appliquées, il est possible, d'une infinité de manières, de choisir un axe fixe avec lequel le corps sera en équilibre, que, dans le cas où il n'y a pas glissement le long de l'axe, tous ces axes forment le complexe linéaire des droites de moment nul, et que dans le cas où il y a glissement sans frottement, tous ces axes sont les droites qui coupent à angle droit une droite fixe, l'axe central du système de forces ? Le même sujet se rencontre ensuite en cinématique, dans les cours de licence. Peut-on admettre que de futurs maîtres, étudiant la distribution des vitesses dans le mouvement d'un corps solide, ne reconnaissent pas l'identité de cette étude et de celle des systèmes de vecteurs, ne constatent pas que l'axe d'un mouvement hélicoïdal n'est pas autre chose qu'un axe central ?

En fait, ce n'est pas tant cette ignorance du sujet qui a déconcerté les candidats qu'une pratique insuffisante des divers modes de représentation analytique d'une droite, car c'est ici surtout que se manifeste leur faiblesse. Trop souvent, ils sont satisfaits lorsqu'ils ont représenté une droite par ses équations ; ils ne se soucient pas de la signification des divers éléments qui interviennent dans cette représentation ; encore moins songent-ils à les utiliser.

Le nombre des copies recueillies est de 85. Après un groupe de 9 candidats qui ont remis des copies blanches, il s'en trouve un second de 16, auxquels a été attribuée la note 1/2, qui n'arrivent pas à former les équations de l'axe central ou à le définir de quelqu'autre manière, puis un troisième de 26, dont les notes s'échelonnent de 1 à 2 1/2, qui s'arrêtent après avoir formé ces équations, sans pouvoir en dégager le cône du complexe ; or si ces derniers avaient interprété les paramètres qui figurent dans leurs équations, ils auraient vu que, sans écriture nouvelle, l'une des équations de l'axe central est précisément aussi l'équation du cône, qu'il suffit de changer le rôle des divers éléments de cette équation, d'y regarder les coordonnées courantes comme celles d'un point fixe, sommet du cône, et les coefficients directeurs comme de nouvelles coordonnées courantes. Notons que ce troisième groupe comprend six admissibles, dont deux ont été admis, et le second un admissible non admis.

Dans le même ordre d'idées, cette même équation était aussi celle du cylindre engendré par les droites du complexe parallèles à une direction fixe ; il suffisait d'y regarder les coefficients directeurs comme des constantes et de conserver aux coordonnées courantes leur signification première. Cette remarque, qui s'applique déjà à de bonnes compositions, évitait les longueurs, les difficultés rencontrées par ceux qui, partant de l'équation du cône, cherchaient ce qu'elle devient dans l'hypothèse où le sommet s'éloigne à l'infini.

L'absence de jugement, d'esprit d'observation, que nous constatons ainsi, se traduit par une tendance marquée, néfaste, au mécanisme, à la technique brutale. Revenons au cône du complexe ; la règle générale, pour l'obtenir, est de former les équations de l'axe central, d'écrire que cet axe passe par un point fixe, et d'éliminer les paramètres : c'est la manœuvre qui est fidèlemenr suivie, mais au prix de quelles difficultés ! Plus loin, il est demandé de chercher dans quelles conditions se décompose le cône ou la courbe du complexe et de donner les éléments de la décomposition : on applique la règle qui est d'annuler le discriminant, même si l'on ne sait pas ensuite effectuer la décomposition ; de plus habiles identifient à un produit de deux facteurs linéaires ; deux copies seulement constatent que l'équation est du premier degré par rapport à l'une des coordonnées, constatation qui devait s'imposer avec l'équation tangentielle d'une parabole, d'où se déduit l'un des facteurs de la décomposition, coefficient de cette coordonnée, puis la condition de décomposition.

Ici, apparaissait le conoïde de Plücker par ses deux équations ponctuelle et tangentielle ; il y avait à établir l'identité des deux résultats, ce qui devait se faire facilement, en constatant que chaque équation représente un conoïde droit d'axe oz, ayant deux génératrices dans tout plan perpendiculaire à oz, et que ces génératrices sont les mêmes dans les deux modes de représentation. A cela, on préfère, suivant la méthode générale, chercher lourdement l'équation tangentielle d'une surface, connaissant son équation ponctuelle ; quelques-uns, plus intelligents, savent utiliser ce fait que la surface est réglée et que tout plan tangent passe par une génératrice.

Dans le but de faire apparaître le plus tôt possible la corrélation qui domine le sujet et d'aider ainsi les candidats, il leur était demandé d'établir que le complexe se transforme en lui-même par polaires réciproques par rapport à certaines quadriques ou complexes linéaires qu'il s'agissait de déterminer. Sauf une exception, ce fut là, non pas un secours, mais une difficulté de plus. La détermination de ces quadriques ou complexes linéaires pouvait se faire rapidement en constatant, d'après des résultats précédents, énoncés d'ailleurs dans le texte, que le plan de l'infini doit correspondre au point à l'infini de *oz*. Mais la lourde technique qui consistait à partir de l'équation générale d'une quadrique ou d'un complexe linéaire aboutissait à des calculs inextricables. Il est curieux de constater, à ce sujet, qu'un candidat, sans arriver à établir la corrélation, a su néanmoins en tirer un heureux parti en observant l'identité, aux notations près, de l'équation ponctuelle du cône et de l'équation tangentielle de la projection de la courbe sur le plan *xoy*.

Nous ne nous arrêterons pas, enfin, à signaler les naïvetés, les défaillances, lorsque la règle cesse d'être présente à l'esprit, auxquelles conduit cet abus de la technique.

Le sujet proposé comprenait quatre parties. Mettant à part les 51 compositions signalées plus haut, les 34 autres, qui comprennent 29 admissibles et 17 admis, ont traité, plus ou moins complètement, la première partie, recherche du cône et de la courbe du complexe, détermination du foyer de celle-ci. Dans cette recherche du foyer, les candidats se trouvaient sur un terrain qu'ils pratiquent plus aisément ; ils savent user des tangentes isotropes ; mais ici encore trop peu savent interpréter leurs résultats, constatent, ce qui se faisait sans résolution d'équations, que le foyer décrit une droite perpendiculaire au plan de la courbe quand celui-ci se déplace parallèlement à lui-même, et qu'il suffit, pour placer cette droite et par suite le foyer, d'en déterminer un point remarquable, par exemple le point auquel se réduit la parabole dans une position particulière du plan.

Fait curieux, les bonnes solutions de cette première partie sont celles qui évitent la recherche des équations de l'axe central, qui attaquent la question directement, expriment la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite fasse partie du complexe proposé ; elles partent ordinairement de cette observation très juste que, dans un complexe linéaire, il y a un rapport constant entre la projection sur l'axe central et le moment par rapport à cet axe, de tout vecteur porté par une droite du complexe ; cette propriété appliquée aux deux droites fixes données D, D', conduit immédiatement à l'équation du complexe. Faut-il insinuer que le succès de cette méthode tient à ce qu'elle use modérément de la représentation analytique d'une droite ? L'habileté d'une composition qui traite ainsi la première partie, en restant constamment sur le terrain de la pure géométrie, aurait été plus riche en résultats si elle avait usé des méthodes analytiques.

Dans la seconde partie, proposée en vue d'établir la corrélation, beaucoup ont vu que le complexe comprend toutes les droites situées dans le plan de l'infini ou passant par le point à l'infini de *oz* ; mais rares sont déjà ceux qui ont montré que ce plan et ce point sont les seuls jouissant de cette propriété. La détermination des quadriques n'a été effectuée que par un seul ; deux autres ont déterminé les complexes linéaires ou approché de cette détermination.

La troisième partie a reçu, en totalité ou en parties, plus de solutions. Mais, faute d'avoir suivi les voies naturelles, les résultats obtenus par l'abus d'un mécanisme sans signification sont rarement interprétés comme il convient. Le conoïde de Plücker était à la base de ces interprétations. Le cône du complexe se décompose lorsque son sommet S se trouve dans le plan de l'infini ou sur le conoïde ; dans le premier cas, il est formé du plan de l'infini et du plan parallèle à la direction δ de ce point à l'infini S, mené par la génératrice g du conoïde perpendiculaire à cette direction δ, plan qui est donc tangent au conoïde en un point P placé sur g ; dans le second cas, le cône comprend le plan perpendiculaire à la génératrice g' du conoïde, passant par S, et le plan mené par S et la génératrice g symétrique de g' par rapport à ox et oy, plan qui est donc tangent au conoïde en un point P placé sur g. La courbe du complexe se décompose lorsque son plan Π est parallèle à oz ou tangent au conoïde ; dans le premier cas, elle est formée du point à l'infini de oz, et du pied, sur le plan Π, de la génératrice du conoïde perpendiculaire à ce plan ; dans le second cas, le plan Π est tangent au conoïde en un point P et contient la génératrice g qui passe par P, la courbe est formée de deux points, l'un à l'infini sur la direction de Π perpendiculaire à g, et l'autre en S, à l'intersection de Π avec la génératrice g' symétrique de g par rapport aux axes ox, oy, la droite SP étant d'ailleurs perpendiculaire à g. Ces résultats sont simultanément corrélatifs et conséquences les uns des autres. Le premier met en évidence ce fait que les droites du complexe peuvent aussi être définies comme celles qui coupent à angle droit une génératrice quelconque du conoïde. Ce point qui n'a été aperçu que par un candidat permettait d'en déduire rapidement tous les autres.

La quatrième partie, celle qui semblait devoir présenter quelques difficultés, n'a été traitée par personne ; quelques-uns en ont abordé seulement les premières lignes. Or, celles-ci découlaient immédiatement de la troisième partie, où apparaissait la correspondance entre deux génératrices g, g' du conoïde, symétriques par rapport à ox et oy ; d'après cela, les droites (Δ), (Δ'), dont l'étude était demandée, sont identiques et peuvent être définies comme s'appuyant sur deux génératrices correspondantes g, g', à angle droit sur l'une d'elles ; sur les plans tangents au conoïde, menés par (Δ), deux sont donc connus, à priori, ceux passant par g et g' ; restait à en trouver un troisième ; la recherche montre qu'il se confond avec le premier ; de même, sur les points d'intersection de (Δ) avec le conoïde, deux sont connus et le troisième se confond avec le premier. Quelques rares candidats ont déterminé seulement les plans tangents ou mis en train leur recherche, mais sans utiliser tous les plans à priori connus. Cette quatrième partie méritait pourtant un meilleur sort ; elle conduit à l'étude d'une seconde surface conoïde, du 5[e] ordre, dont l'équation du troisième degré en z, se résout simplement par les formules de Cardan.

Les compositions se classent donc principalement d'après leurs solutions, plus ou moins complètes, des première et troisième parties. La composition classée première, à laquelle a été attribuée la note 19, a pris une avance sérieuse sur les autres, en traitant en outre, avec beaucoup d'élégance, la seconde partie ; puis viennent onze compositions qui peuvent être regardées comme relativement bonnes et dont les notes s'échelonnent de 13 1/2 à 7 1/2 ; ensuite, assez bonnes ou passables, quatre notes 7, trois 6 1/2, deux 6, cinq de 5 1/2 à 4 1/2 : toutes ces compositions, sauf une seule cotée à 4 1/2, sont celles de candidats qui ont été déclarés admissibles et sur lesquels 15 ont été admis ; les suivantes, plus ou moins faibles, comprennent cinq notes 4, une 3 1/2, deux 3 ; sur celles-ci ne se trouvent plus que quatre admissibles, dont deux admis définitivement.

L'impression d'ensemble laissée par ces 34 compositions est satisfaisante ; elle révèle des sujets intelligents, elle laisse supposer que leurs auteurs, entraînés d'avantage à l'étude analytique des droites et des systèmes de droites, auraient donné des compositions de bonne qualité. »

Calcul différentiel et intégral (M. Fatou). — « Le problème de calcul différentiel et intégral proposé était relatif à l'étude de certaines fonctions analytiques et harmoniques représentées par des intégrales définies ; les différentes questions à résoudre pouvaient l'être en général très facilement en appliquant les résultats ou les méthodes de démonstration qui figurent dans tous les cours d'analyse mathématique concernant les propriétés générales des fonctions analytiques, l'intégrale de Cauchy, la série de Fourier et d'une manière générale les propriétés des intégrales dites singulières. La solution du problème n'exigeait donc pas une grande faculté d'invention et tous les candidats qui ont suivi avec assiduité le cours de calcul différentiel et intégral dans l'une de nos Universités, et se sont donné la peine de faire quelques exercices relatifs à ce cours, auraient dû, semble-t-il, remettre une copie satisfaisante. Cependant la plupart de ces copies n'ont pas répondu à ce que l'on attendait et un très petit nombre d'entre elles ont paru mériter une note supérieure à la moyenne. En particulier, la dernière partie du problème, qui consistait dans l'étude des différentes déterminations d'une fonction analytique multiforme, n'a été comprise par personne. Les autres parties ont été traitées d'une manière satisfaisante par quelques candidats, mais le plus grand nombre, même parmi ceux qui ont été admissibles, ont paru n'avoir que des notions extrêmement imprécises sur les principes les plus importants du calcul intégral et de la théorie des fonctions. Il faut donc constater, comme les années précédentes, que les candidats à l'agrégation, s'ils montrent en général — à l'oral surtout — une connaissance suffisante des matières qui forment le programme de l'enseignement des lycées, n'ont pas, pour la plupart, la culture mathématique qui, d'après les programmes, devrait être exigée d'eux. »

Quelques chiffres, à l'appui des observations du correcteur : sept notes de 10 à 14, cinq de 5,5 à 9, quarante-cinq de 3 à 5, vingt-deux de 0 à 2,5, soit une moyenne générale de 4, indiquent que les connaissances d'un grand nombre de candidats en analyse sont bien superficielles.

Mécanique rationnelle (M. Chatelet). — « 73 copies, relatives à la composition de mécanique rationnelle, dont 4 entièrement blanches, ont été remises. Les notes attribuées se sont réparties ainsi : huit entre 15 et 20, sept entre 10 et 14, autant entre 8 et 9, dix de 6 à 7, sept égales à 5, quatre à 4, sept à 3, treize à 2, cinq à 1 et autant à zéro.

Les candidats avaient été prévenus de l'indépendance des trois parties et en fait, aucun ne les a traitées simultanément de façon complète ; mais des copies distinctes contenaient d'excellentes solutions de la première et de la deuxième partie.

La première question était en réalité un problème de statique avec intervention de forces d'inertie assez simples. On pouvait distinguer 9 inconnues. La considération de la roue d'avant et du système des roues arrière fournissait immédiatement 6 équations linéaires ; la considération soit du bâti, soit du tricycle « solidifié », fournissait les trois autres équations linéaires nécessaires. La considération simultanée des 4 systèmes donnait par suite 12 équations à 9 inconnues, compatibles bien entendu, et conduisant à des vérifications intéressantes.

23 candidats se sont bornés à des généralités, ou bien ont écrit des équations au hasard, sans même souvent chercher à dénombrer les inconnues. Chez les autres, l'erreur la plus fréquente est de raisonner comme si le moteur était extérieur au système et 33 ont ainsi écrit les équations d'un tricycle remorqué au lieu d'un tricycle automoteur. Cette erreur a été commise soit en introduisant le couple p dans les équations du tricycle solidifié, soit en n'introduisant pas le couple de réaction $-\mu$ dans les équations du bâti.

12 seulement ont obtenu un système exact et complet. C'est une proportion bien faible en un siècle d'automobilisme.

Il faut néanmoins ajouter que la présentation et le développement des calculs ultérieurs ont permis d'attribuer d'assez bonnes notes à certaines copies (6 au-dessus de la moyenne) où cette erreur a été commise.

Des maladresses ont été constatées, dans l'étude des systèmes d'équations et dans la présentation des calculs. Des professeurs devraient être habitués à ne transcrire que les calculs véritablement intéressants, à bien mettre en lumière la marche suivie, à ne pas donner à la résolution d'équations linéaires l'aspect d'un mélange informe que l'on triture au hasard pour obtenir, avec beaucoup de chance et de peine, les éléments séparés. Dans deux copies seulement on a osé écrire des équations surabondantes et s'en servir comme vérification.

Le calcul direct du moment a été fait par une dizaine de candidats qui ont cru appliquer le théorème des forces vives. Aucun ne semble avoir pensé qu'il écrivait ainsi en réalité une combinaison particulière du système d'équations, c'est-à-dire qu'il annulait le travail de toutes les forces, y compris celles d'inertie, dans un déplacement virtuel convenable ; le travail des forces d'inertie s'obtenait d'ailleurs directement d'une façon plus simple qu'en dérivant la force vive.

Dans près de vingt copies, assez bonnes par ailleurs, les signes et conventions de l'énoncé sont interprétés incorrectement ; il n'a pas toujours été facile de comprendre des conventions particulières que leurs auteurs n'ont pas pris la peine de préciser et qui ont paru souvent être le résultat du seul hasard.

La difficulté de la deuxième question résidait surtout dans la nécessité de faire largement des approximations pour obtenir des équations et des calculs simples. Elle n'a donné lieu qu'à une bonne copie où, par contre, la première question était à peine ébauchée. Deux autres candidats ont obtenu des systèmes d'équations corrects sans en tirer tout le parti possible ; six ont commencé des calculs, à peu près simplifiés ; trois ont écrit des équations exactes, mais n'y ont pas effectué les approximations demandées.

Aucun candidat n'a abordé la troisième question qui pourtant ne différait pas essentiellement de la seconde. »

La liste des 36 admissibles a été arrêtée à la moyenne 4 (sur 20) qui peut paraître insuffisante, mais que font prévoir les notes mentionnées dans les rapports particuliers.

Le rapprochement des copies et des en-têtes a montré que le Jury avait été bien inspiré en allant aussi loin, puisque plusieurs anciens admissibles se placent dans la dernière partie de la liste. En outre, sur les neuf candidats admissibles à des concours antérieurs, qui figurent parmi les refusés, six se classent dans les dix premiers de cette catégorie. Plusieurs doivent réussir, pour peu qu'ils persévèrent.

Le premier admissible se détachait nettement des autres avec une moyenne de 16, tandis que le second n'atteignait pas 12 et que la moyenne tombait au-dessous de 10, à partir du sixième.

Onze élèves, cinq anciens élèves, deux auditeurs et une auditrice de l'école normale supérieure, un boursier et deux étudiants libres, un chargé de cours, treize professeurs de collège ou d'école primaire supérieure, délégués, répétiteurs, constituaient la liste des admissibles.

Epreuves pratiques

Epure (M. Chenevier) — « Les candidats avaient à construire les projections de l'intersection de deux paraboloïdes hyperboliques P et Q. Ceux-ci avaient une génératrice commune. Ce renseignement n'était pas fourni par l'énoncé, mais il était en évidence dès la mise en place des données. 7 candidats n'ont pas vu cette particularité.

Les notes obtenues sont 18, 13, 11, deux 10, treize entre 3 et 9, et dix-huit au-dessous de 3. Parmi les mauvaises épures, il en est qui dénotent chez leurs auteurs une ignorance complète de la géométrie descriptive. Certains l'avouent d'ailleurs en procédant par le calcul à la recherche de l'intersection et en construisant les courbes trouvées.

Une seule épure est ponctuée sans faute. La ponctuation ne présentait aucune difficulté si l'on y procédait par voie logique et non en cherchant à se représenter dans l'espace une surface plus ou moins facile à imaginer.

La moyenne de l'épreuve est 4,54. »

Calcul (M. Fatou). — « L'épreuve pratique de calcul, proposée aux candidats admissibles, consistait dans la recherche d'une intégrale définie qui se rencontre dans un problème d'astronomie : calcul de l'attraction moyenne, exercée par la planète Jupiter, sur un point matériel de masse 1, de coordonnées données, situé à la distance moyenne de Mercure au Soleil. Le problème comportait donc un calcul analytique, consistant à développer en série, d'ailleurs rapidement convergente, une certaine intégrale définie, et la mise en nombres du résultat obtenu, avec une approximation donnée. Ici encore le nombre des copies satisfaisantes a été très restreint ; cependant quelques candidats ont remis d'assez bonnes copies contenant, à peu de choses près, un résultat exact. »

Deux copies viennent en tête avec les notes 16 et 17, trois sont cotées de 10 à 11, autant de 4,5 à 6 ; toutes les autres notes ne dépassent pas 4 et, parmi elles, il y en a seize qui sont 0 ou 1.

La moyenne de l'épreuve est 3,28.

Epreuves orales (1)

Elles ont racheté l'insuffisance des épreuves écrites ou pratiques. 23 notes de leçons en élémentaires, 22 en spéciales sont supérieures à la moyenne. 17 candidats ont vu chacune de leurs leçons notée au-dessus de 10 : quinze d'entre eux ont été admis.

Six notes supérieures à 15 en élémentaires, autant en spéciales montrent que les très bonnes leçons ne sont pas rares. Peu sont franchement mauvaises. La note la plus faible, en élémentaires, est 5 ; on est descendu jusqu'à 2 en spéciales. Toutes les notes inférieures à 7 correspondent à une préparation insuffisante ou à un défaut d'adaptation ; la simplicité désirable, dans une leçon du programme de Seconde ou de Première, n'est nullement incompatible avec la sûreté du langage et la précision des définitions : plusieurs des leçons entendues péchaient sur ces deux points. Au même niveau, l'accès de l'idée générale devrait être préparé avec un soin tout particulier.

Deux leçons de cosmographie, l'une étudiée sérieusement, l'autre improvisée ou presque, ont été cotées respectivement 18 et 5. Les futurs candidats devront méditer cet exemple. Parmi les matières du

(1) La liste des leçons qui ont été faites par les candidats admissibles en 1927 peut être demandée en communication au Bureau (Joindre 1 fr. en timbres-poste pour frais d'envoi).

programme, il n'en est pas qui soit d'un rendement plus sûr que la cosmographie.

Des candidats se sont heureusement inspirés des rapports antérieurs. Mais la persistance de certaines erreurs ou de certaines lacunes montre bien la nécessité d'insister.

Le Jury a entendu parler encore une fois des trois systèmes de relations *fondamentales* qui existent entre les six éléments d'un triangle. Or ce qualificatif devrait être refusé à toute relation qui contient plus de quatre éléments, car on peut en former une infinité. En fait, il n'y a que deux systèmes de relations fondamentales.

La résolution d'un problème de trigonométrie est souvent facilitée par l'emploi d'un angle auxiliaire, susceptible d'une infinité de déterminations : on choisit celle qui se prête le mieux au calcul pratique. Si le raisonnement fait montre qu'une détermination quelconque de l'angle auxiliaire donne toutes les solutions, il est inutile de démontrer que toutes les déterminations conduisent aux mêmes solutions. Tout au plus pourrait-on y trouver l'occasion d'un exercice de vérification ; y voir davantage est d'une logique douteuse.

Un calcul numérique, au tableau, ne devrait pas se limiter à la lecture des résultats obtenus au cours d'une préparation ; c'est en utilisant la table de logarithmes, en présence des élèves, qu'on leur apprend à s'en servir. Il est d'ailleurs préférable, dans l'enseignement, de faire donner les logarithmes par les élèves eux-mêmes, au fur et à mesure des besoins.

La discussion de deux équations du premier degré, à deux inconnues, est rarement bien présentée. Tel candidat qui exposerait cette même discussion, dans le cas général, de façon impeccable et ne manquerait pas de mettre en lumière l'importance du déterminant principal et des déterminants caractéristiques associés à ce principal, fait un raisonnement incomplet ou se répète quand il s'agit de ce cas particulier. Quelle que soit la méthode employée, on suppose au départ que l'un des coefficients des inconnues, a par exemple, n'est pas nul, ce qui revient à dire que le déterminant principal est au moins d'ordre 1. On est ensuite conduit à distinguer, suivant que $ab' - ba'$ est nul ou non. Dans le second cas, il convient de remarquer que l'emploi d'un autre coefficient non nul redonne ce même déterminant principal et que les formules définitives de résolution ne sont pas modifiées ; on les a établies à l'aide d'une hypothèse ($a \neq 0$) qui peut se trouver en défaut, de sorte que leur maintien doit être justifié. Dans le premier cas, l'unique caractéristique, $ac' - ca'$, est lié au principal a qui a servi à le former et ils sont inséparables, dans le tableau qui résume la discussion.

Il ne faudrait pas dire que $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ est la plus grande racine de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors que ce fait dépend du signe de a.

Énoncer sans précaution que deux dièdres symétriques sont de sens contraires est une affirmation discutable, puisque le sens d'un dièdre dépend non seulement du choix de la première face, mais encore du sens fixé sur l'arête.

La recherche des plans tangents à une sphère, menés par une droite (soit P), utilise la construction des plans tangents, passant par cette droite, à un cône dont le sommet est sur la droite et qui est circonscrit à la sphère. Comme il y a une infinité de ces cônes, si l'on n'établit pas que tout plan P est tangent à l'un quelconque d'entre eux, on devrait conclure qu'il y a une infinité de plans P. En affirmant — avec raison d'ailleurs — qu'il n'y en a pas plus de deux, le candidat a commis une grosse faute de logique. C'est une des nombreuses conséquences de l'abus des constructions arbitraires en géométrie.

Signalons aussi quelques singularités du langage.

La phrase « si p divise a, le théorème est démontré » attribue à une hypothèse le caractère d'une démonstration. Il serait plus juste de dire : « le théorème n'a pas besoin d'être démontré ». Cette observation n'est pas nouvelle.

« Une courbe qui aurait un maximum à l'infini » est un exemple assez fâcheux, où la géométrie et l'algèbre s'affrontent en style télégraphique. De tels raccourcis, lorsqu'ils sont voulus, peuvent aboutir à une concentration de la pensée ; mais ils sont le plus souvent l'indice d'une répugnance à l'effort et ils inclinent à juger avec indulgence les maîtres qui empruntent à l'argot de leurs élèves et disent couramment « la classe de math. élém. ».

Trois candidats classés 13^e, 15^e, 17^e, à l'admissibilité, ont été éliminés finalement ; tous trois avaient des notes très faibles de calcul et d'épure, et la moyenne de deux d'entre eux, à l'oral, ne dépassait pas neuf. En revanche, trois candidats admissibles avec les numéros 20, 23 et 25 sont parmi les reçus.

La faiblesse des épreuves écrites et pratiques a conduit naturellement à un abaissement de la moyenne générale, exigée pour l'admission. Mais ceux qui se classent parmi les 16 premiers ont, à l'oral, une moyenne qui n'est pas inférieure à 12, et le Jury avait des raisons suffisantes pour faire confiance aux trois suivants, sans crainte de compromettre le bon renom de l'agrégation.

19 candidats ont donc été admis. Celui qui vient au premier rang est comparable aux meilleurs des concours antérieurs. Un assez grand nombre font augurer de bons professeurs ; aucun ne paraît devoir être inférieur à sa tâche.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

E. Blutel.