5 et 6. Les sujets de compositions de mathématiques aux différents examens et concours

Baccalauréat et Bourses. — M. Dumarqué donne lecture de l'étude critique de M. Decerf, empêché d'assister à l'Assemblée générale.

Mes chers Collègues,

Si nous passons en revue les questions de cours posées au Baccalauréat en 1927, nous ne trouvons rien de bien extraordinaire à signaler. Il n'est arrivé qu'une seule fois — à Alexandrie, 1re partie, juillet 1927 — que les 3 questions ne soient pas prises dans la même partie du programme. Comme toujours, il y a par-ci par-là des questions un peu longues, ou mal délimitées, comme les suivantes que nous retrouvons tous les ans :

Droite et plan perpendiculaires.

Cas d'égalité des trièdres.

Volume de la pyramide.

Théorie des projections : c'est Rennes qui pose celle-là à la 1re partie en octobre 1927 ; c'est vraiment bien vague. Est-ce de la géométrie, de la descriptive, de la trigonométrie ?.....

Relations entre les éléments des triangles.

Sections planes du cône.

Tangente à la parabole.

Enfin celles-ci, qui sont vraiment d'une longueur exagérée :

Distances, dimensions et constitution physique du soleil et des planètes (Lyon, 2e partie, octobre 1927).

Progressions arithmétiques et progressions géométriques (Alexandrie, 2e partie, juillet 1927).

Trouverons-nous quelque question sortant du programme ? Celle-ci peut-être, posée à la 2e partie, en juillet 1927, à Lyon : *Intersection d'une droite et d'une parabole.* Il nous faut en effet remarquer que le programme encore en application dans la classe de Mathématiques ne parle d'intersection d'une droite et d'une conique que pour l'ellipse considérée comme projection du cercle. Donc, en toute rigueur, la question de Lyon est contestable.

Plusieurs fois les questions de cours sont complètement remplacées par de petits problèmes : ainsi à Aix (1re partie, octobre 1927), où l'on demande d'étudier les signes du trinôme $6 \cos^2 x - 5 \cos x + 1$; à Alger (2e partie, octobre 1927), où l'on demande de démontrer qu'on ne change pas le p. g. c. d. de deux nombres si l'on multiplie l'un d'eux par un nombre premier avec l'autre.

On voit par ces exemples que nous n'avons pas de critiques bien sérieuses à formuler.

Il en va autrement pour les problèmes.

Que dire de celui donné à Caen, à la 1re partie, en octobre dernier ? Il s'agissait du volume d'une pyramide inscrite dans une sphère ; ce volume, exprimé en fonction de 2 angles u et v, conduisait à une fonction de la forme

$$k \sin^2 u \sin v \cos u \cos v.$$

Malheureusement l'auteur du problème oublia l'exposant 2, et invita les candidats à exprimer cette fonction à l'aide de $u+v$ et $u-v$; en supposant $u+v$ constant, il en déduisait un joli problème, qui, hélas, péchait par la base.

Quand on s'en aperçut — et ce fut bien tardif, à ce qu'on nous a dit, — beaucoup de candidats avaient déjà reçu avis de leur échec. La Faculté de Caen fit un examen de rappel, de sorte que tout le monde eut finalement satisfaction. Mais vraiment, la règle constante ne devrait-elle pas être que le problème proposé par un professeur fût d'abord essayé et rédigé par un autre, afin qu'on évitât de pareils contretemps !

Les autres problèmes que nous avons à signaler ne méritent que des reproches infiniment moins graves.

Grenoble propose, en octobre 1927, à la 1re partie, et en un texte mal dactylographié, de résoudre graphiquement une équation du 3e degré

$$x^3 - 7x^2 + 5x + 25 = 0.$$

Il fallait même étudier le signe du premier membre, en vue d'une discussion ultérieure, où ce premier membre devenait le discriminant d'une autre équation. Tout cela est trop difficile. Déjà, en juillet, le même Grenoble avait proposé aux candidats à la 1re partie de transformer une équation du second degré en $\operatorname{tg} x$ en une équation en $\operatorname{tg} 2x$, puis d'utiliser les résultats trouvés pour un problème de descriptive : c'était déjà un peu fort.

Toulouse aime aussi les difficultés. En juillet (2e partie), on avait formé une équipe mixte d'ouvriers d'habileté différente, chargée de mener à bien, en x jours, un travail donné. Ce problème est assez intéressant ; seulement il sort des préoccupations ordinaires de nos élèves ; rien de mieux sans doute que de faire appel à leur intelligence, mais alors il faut les prévenir..... En octobre aussi, le problème donné à Toulouse à la 1re partie (problème de parallaxe) a été jugé trop difficile, et celui de la 2e partie est un peu obscur, faute d'une figure.

Lyon et Strasbourg aiment les longueurs :

A Strasbourg (2e partie, octobre 1927), 3 mobiles se meuvent sur 3 droites parallèles, en restant tous trois en ligne droite : deux d'entre eux ayant un mouvement uniformément varié, étudier le mouvement du 3e. Ce ne serait pas mal, mais il y a tout de même 8 parties à traiter ! C'est effarant.

A Lyon (1re partie, octobre 1927), longue étude, en 6 parties, d'une équation

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} B = 0.$$

Trop long pour le temps accordé aux candidats !

A Lyon encore (2e partie), octobre 1927, dans un problème d'annuités et intérêts composés, on a oublié de dire que les taux de 2 placements étaient — du moins je le pense — égaux.

A Besançon (2e partie, octobre 1927), négligence impardonnable dans le texte, où l'on insinue que 2 forces AN et AT auraient pour résultante le segment NT.

Nous voudrions savoir ce que veut dire Beyrouth, quand il nous invite à la 1re partie, en juin 1927, à établir l'équation d'une vitesse « par le raisonnement direct et aussi par les dérivées ».

Félicitons, pour terminer, Paris, qui fait les choses à la bonne franquette, et sans se mettre en peine d'une originalité inopportune : pour fabriquer le problème de Première D, juillet 1927, on s'est contenté de reprendre la figure de l'année précédente, on l'a fait tourner d'un angle droit, et on a désigné par x l'angle complémentaire de celui de l'année d'avant. Et cela a fait un nouveau problème.

L'examen des Bourses a occasionné aussi quelques réclamations. En Quatrième, une question sur le parallélogramme a paru inopportune parce que, le 20 mars, il y a des professeurs qui n'ont pas encore abordé cette étude. Remarque analogue pour le problème de Troisième, qui fait intervenir le rapport des aires de 2 carrés, et aussi le volume du parallélépipède rectangle. Il serait souhaitable qu'un programme précis fût prévu pour l'examen des Bourses, puisque cet examen s'intercale au milieu de l'année scolaire, ou que cet examen fût reporté à la fin de l'année.

Il ne me reste qu'à remercier les collègues dont les communications m'ont facilité ce travail en m'excusant auprès d'eux de ne pas leur avoir toujours répondu personnellement.

MM. Anzemberger et Perfetti relèvent et regrettent la partie suivante (1) d'une phrase de cet exposé : « ...rien de mieux que de faire appel à leur intelligence, mais encore faut-il les prévenir. » (2). Puis ils s'élèvent contre l'opinion du rapporteur relative aux énoncés donnés à Grenoble : ils considèrent que ces problèmes sont parfaitement adaptés à la force des élèves.

Le Président rappelle qu'il a présenté les excuses de M. Decerf empêché d'assister à l'Assemblée générale. Puis après une discussion au sujet de ces énoncés (3) et à laquelle prennent part MM. Dumarqué, Gros, Lecomte, Weill..., le Président fait observer que si l'on peut différer d'opinion quant à la difficulté de ces problèmes, — et c'est ce qui résulte de cette discussion, — il n'en reste pas moins acquis que le texte, remis en octobre 1927 dans l'académie de Grenoble aux candidats à la 1re partie du Baccalauréat, était dactylographié d'une façon par trop défectueuse, négligence matérielle qui aurait pu être évitée facilement et qui ne pouvait que gêner les candidats.

Grandes Ecoles. — M. Hennequin donne lecture de son étude critique :

Depuis plusieurs années, les sujets des compositions données au Baccalauréat font l'objet, devant notre Assemblée générale, d'un examen très

(1) Evidemment ironique de ma part (Note du Rapporteur).

(2) La phrase complète est : « Ce problème est assez intéressant ; seulement il sort des préoccupations ordinaires de nos élèves : rien de mieux sans doute que de faire appel à leur intelligence, mais encore faut-il les prévenir. »

(3) **Grenoble, 1re partie C. D., juillet 1927** : On suppose que l'équation (E)

$$x^2 + px + q = 0$$

ait deux racines et on désigne ces racines par tg a et tg b. On demande :

1° de trouver la relation qu'il doit y avoir entre p et q pour que l'on ait

$$a + b = \frac{\pi}{3} ;$$

2° de former l'équation du 2e degré ayant pour racines tg $2a$ et tg $2b$;

3° Les angles a et b sont respectivement les angles aigus que font avec une ligne de terre xy les traces verticale et horizontale d'un plan quelconque. V désignant l'angle des traces de ce plan *dans l'espace*, démontrer que l'on a $\cos V = \cos a \,.\, \cos b$ et en déduire la relation $\operatorname{tg}^2 V = p^2 + q^2 - 2q$.

Grenoble, 1re partie C. D., octobre 1927 : 1° Etudier la variation de la fonction $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 25$. Construire la courbe représentative. Déterminer à un dixième près les racines de l'équation $f(x) = 0$.

2° Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, l'équation

$$m^2 \sin^2 x - \sin x \,.\, (2m^2 + m + 10) + m^2 + 17{,}25 = 0.$$

attentif. Le Bureau a pensé qu'il y avait lieu d'étendre cet examen aux compositions des concours d'entrée aux Grandes Ecoles en 1927.

L'annulation, sur la demande de notre Association, de la composition de calcul au concours de Polytechnique de 1927, l'obligation dans laquelle s'est trouvée l'Ecole St-Cyr, à la même époque, de recommencer l'épreuve de géométrie, prouvent déjà que les énoncés des problèmes donnés aux concours, malgré le soin qui est apporté, en général, à leur préparation, à leur rédaction et à la correction des textes imprimés, ne sont pas entièrement à l'abri des critiques maintes fois adressées aux sujets de Baccalauréat.

L'énoncé du calcul numérique de l'Ecole Polytechnique demandait aux candidats de calculer directement les valeurs de $y = 1 - \cos 2x$, puis à l'aide de la série égale $y = \frac{16}{\pi}\left(-\frac{\sin x}{1.1.3} + \ldots + \frac{\sin 7x}{5.7.9} + \ldots\right)$ en prenant 2, 3, ou 4 termes, et de déterminer, par comparaison, l'erreur commise. On peut d'abord faire les plus sérieuses réserves sur la signification pratique d'un tel calcul où, pour obtenir les valeurs de $1 - \cos 2x$, on fait appel à un développement de Fourier autre que $1 - \cos 2x$ lui-même, et sur la détermination de l'erreur, à partir de la valeur exacte de la fonction. Mais, constatons immédiatement avec les candidats que la somme approchée de la série était voisine de $\cos 2x - 1$ et non de $1 - \cos 2x$. Fallait-il en conclure, avec quelques candidats, que l'erreur était sensiblement égale à $2y$, ou comme d'autres, s'entêter à rechercher une faute de calcul toujours fuyante ou se borner à déclarer que l'énoncé comportait quelques lapsus ? Ce n'était, certes, qu'un signe moins devant le facteur $\frac{16}{\pi}$ qui était omis ; mais alors que l'Ecole Polytechnique avait voulu augmenter l'importance du calcul numérique, cette omission a réduit à zéro le coefficient de l'épreuve.

Le problème de géométrie du Concours de St-Cyr était relatif à un triangle inscrit dans un cercle donné et d'orthocentre H. Il était parfaitement adapté au programme de la classe de Mathématiques, c'était un excellent sujet de concours ; malheureusement l'interversion des lettres H et A, presque au début de l'énoncé a désorienté les candidats dont certains (peu nombreux) ont habilement rectifié l'énoncé, mais dont les autres ont été médusés par une droite variable qui avait deux points fixes. L'épreuve a été annulée et recommencée. Il est à craindre que, dans ces conditions, de peur de léser ceux qui ont fait une seconde composition mauvaise, on n'ait finalement diminué l'influence de l'épreuve de mathématiques sur l'admissibilité.

Ces erreurs matérielles, légères en soi, mais lourdes de conséquences, pourraient, semble-t-il, être facilement évitées ; si les épreuves de l'impression ou de l'autographie des textes étaient revues attentivement à la fois par l'auteur du problème et par le président du jury ou par une autre personne, l'omission ou l'interversion apparaîtraient sans doute à l'un d'eux. En tout cas, la question se pose des mesures à prendre pour réparer l'erreur quand elle a été commise. L'annulation pure et simple de la composition cause un dommage aux meilleurs candidats. C'est en faisant refaire la composition que l'on peut le mieux atténuer les conséquences de l'erreur ; certains prétendront, il est vrai, qu'ils auraient fait une composition parfaite sur le premier sujet correctement énoncé au lieu d'une nouvelle composition médiocre. Mais, n'y a-t-il pas, dans tout concours une part de hasard, que l'on doit évidemment s'efforcer de faire tendre vers zéro, sans avoir la prétention de pouvoir l'éliminer complètement ?

Parfois, la coquille d'impression passe inaperçue des candidats, peu soucieux de peser les termes d'un énoncé qui n'ont pas d'influence sur la marche des opérations. C'est ainsi qu'au concours d'admission à Centrale, il était question d'une intégrale portant sur la différentielle d'*une* fonction rationnelle de x et de $\sqrt{ax^2+bx+c}$, alors qu'en réalité la différentielle était de la forme $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ et non de la forme $d\,[R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})]$. Est-il absolument sûr qu'aucun candidat ne se soit demandé si son résultat était bien conforme à l'énoncé ? Faut-il s'en réjouir ou s'en inquiéter ?

Les coquilles d'impression ne sont pas les seules causes de désarroi des candidats. L'auteur du problème risque parfois une plaisanterie qu'il est permis de trouver, avec les candidats, d'un goût douteux. Est-il bien spirituel de demander, comme on l'a fait à l'Ecole des Ponts et Chaussées, de séparer et de calculer à 0,01 près les racines réelles d'une équation qui se trouve être $x^4 - 1 = 0$ et d'amener les candidats à rechercher longuement où se trouve l'erreur qui les conduit aux racines $+1$ et -1 dont on demande la valeur à 0,01 près ?

En restant dans la note grave, l'énoncé du problème de dynamique du concours des Ponts-et-Chaussées ne nous laisse pas moins d'étonnement : « *On lance dans le champ de forces* $X = y + z - x$, $Y = z + x - y$, $Z = x + y - z$ *un point matériel, d'une position* $M_0\,(x_0 = y_0 = z_0 = 1)$ *avec une vitesse* $v_0 = 1$; *sans étudier les circonstances de son mouvement, déterminer la région de l'espace dans laquelle se déplace ce point et montrer qu'elle est indépendante de la vitesse initiale.* » Or, un point matériel lancé d'une position fixée, avec une vitesse d'intensité et de direction données, dans le champ de forces défini, a une trajectoire bien déterminée ; dans ces conditions, la question « déterminer la région de l'espace dans laquelle se déplace ce point » n'a pas de sens puisque toute région de l'espace entourant la trajectoire répondrait à la question.

Si l'on veut la région de l'espace formée par toutes les trajectoires correspondant aux diverses vitesses initiales d'intensité unité, il faut énoncer la question : *déterminer la région de l'espace formée par l'ensemble des points que le mobile peut atteindre lorsque la vitesse initiale prend toute direction.* La question dans le cas envisagé offrait de très grosses difficultés.

Il semble que l'auteur du problème ait eu plutôt en vue la région de l'espace déterminée par l'équation des forces vives. Mais alors, la région ainsi définie contient des points qui ne peuvent pas être atteints par le mobile : l'exemple du point pesant le montre nettement, puisque, dans ce cas, la relation $v^2 = v_0^2 - 2gz$ impose seulement au mobile la condition d'être au-dessous du plan $z = \frac{v_0^2}{2g}$ alors qu'il reste au-dessous du paraboloïde de sûreté

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - g\,\frac{(x^2+y^2)}{2v_0^2}.$$

Il était donc indispensable de préciser l'énoncé en disant : « *Déduire du théorème des forces vives une région, indépendante de la direction de la vitesse initiale, dans laquelle demeure le point matériel* » et d'enlever à la question une apparence énigmatique qui n'est pas de mise dans les concours d'entrée aux Grandes Ecoles.

Nous avons plaisir à constater que les faits que nous signalons sont de rares exceptions et que, dans l'ensemble, les énoncés des problèmes sont rédigés avec un grand souci de précision et de clarté.

Sans entrer dans la discussion des sujets proposés, nous croyons qu'il serait préférable d'éviter des questions qui, tout en étant parfaitement accessibles aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales, sont une application immédiate de théories en marge du programme, comme la question d'analyse de l'Ecole Polytechnique relative aux développements limités

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

qui n'offrait plus la moindre difficulté pour les élèves à qui l'on avait exposé e mécanisme des développements en série de Fourier. De même les calculs de géométrie différentielle de la première composition du concours de l'Ecole Normale Supérieure apparaissaient tout différents aux élèves ayant étudié le ds^2 d'une surface, en dehors du programme de classe de Mathématiques Spéciales, et à ceux qui n'avaient pas ces connaissances.

Nous signalerons aussi que certains problèmes, comme ceux de l'Ecole Normale Supérieure ou ceux du concours d'admissibilité à Centrale paraissent bien longs étant donné le temps dont disposent les candidats. La crainte qu'un élève extraordinaire n'ait terminé l'épreuve une demi-heure avant la fin amène les examinateurs à donner des problèmes, qui, depuis une dizaine d'années, se sont enflés à tel point que souvent aucun candidat ne les traite entièrement. De bons élèves sont conduits à traiter rapidement et superficiellement, ou tout simplement à mal traiter, des questions qu'ils résoudraient correctement s'ils n'avaient le désir d'atteindre la fin lointaine du problème. Il y a un équilibre à réaliser entre la durée de l'épreuve et l'importance des questions proposées.

Ces rapides observations montrent l'intérêt qu'il y aurait pour notre Association à recueillir les remarques et les critiques de tous nos collègues sur les sujets de concours. En attirant l'attention des administrations des Grandes Ecoles sur les remarques formulées, nous pourrions éviter le retour d'incidents toujours regrettables et nous resserrerions, pour le plus grand bien des candidats et des écoles elles-mêmes, une collaboration que notre Association a toujours désirée très étroite avec ceux que préoccupe la valeur de notre enseignement mathématique.

L'Assemblée approuve cet exposé, et après s'être associée aux remerciements adressés par le Président aux rapporteurs : MM. Decerf et Hennequin, adopte à l'unanimité la résolution suivante :

L'Assemblée générale renouvelle le mandat donné au Bureau de faire procéder chaque année à une étude critique des sujets de compositions de mathématiques données aux différents examens et concours et de transmettre aux autorité compétentes — s'il y a lieu — les remarques que cette étude aura suggérées.

Elle invite en outre les membres de l'Association qui auraient pu constater des difficultés au sujet de ces textes, à faire immédiatement toutes les réserves nécessaires auprès des jurys d'examen ou de concours, et à en aviser aussitôt le Bureau pour lui permettre d'agir sans retard.