3. Unification des définitions de mots et des notations mathématiques.

M. Desforge donne lecture de son rapport :

L'enquête ouverte par notre Association au sujet des notations des produits scalaire et vectoriel a provoqué un assez grand nombre de réponses. Je pense être l'interprète de tous nos collègues en remerciant tout particulièrement les professeurs de l'enseignement supérieur (1) qui ont bien voulu par leurs intéressantes communications nous apporter une aide précieuse.

Les points de vue sont, naturellement, assez variés. Nous verrons cependant qu'une majorité se dégage, jusqu'à présent, en faveur de certains symboles.

Avant d'examiner les différentes solutions du problème je tiens à faire une rectification concernant la note publiée au *Bulletin* n° 53 (p. 64) : j'avais indiqué, sans entrer dans le détail, que le *produit vectoriel* est le *produit extérieur* de Grassmann. Ce n'est pas exact. Le *produit extérieur* de Grassmann est un bivecteur, représenté graphiquement à l'aide d'un parallélogramme orienté, et le produit vectoriel correspond, dans le système de Grassmann, au *complément* (ergänzung) du *produit extérieur*. Néanmoins plusieurs auteurs ont donné le nom de produit extérieur au produit vectoriel dont nous avons à nous occuper ici.

Cela dit, je reviens à la question des notations.

Je préciserai d'abord un premier point : notre collègue M. Weber, dans une note parue au *Bulletin* n° 53 (p. 66) déclare qu'il lui semble nécessaire de pouvoir disposer d'un signe opératoire pour chaque opération que l'on a à indiquer, et qu'il convient, par conséquent, de prévoir trois signes différents pour indiquer les trois « multiplications » que l'on rencontre au début de la théorie des vecteurs : multiplication d'un vecteur par un scalaire, multiplication scalaire de deux vecteurs, multiplication vectorielle de deux vecteurs, — opérations pour lesquelles il adopte respectivement les signes $\cdot$, $\times$, $\wedge$.

Or, je crois qu'il convient de séparer la question de la « multiplication » d'un vecteur par un scalaire de celle des « multiplications » relatives à deux vecteurs. Les confusions entre ces opérations ne sont pas à craindre, car dans la multiplication d'un vecteur par un scalaire, les deux facteurs sont de natures différentes et les notations choisies pour représenter ces facteurs sont en général assez claires pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté. La tendance générale pour la représentation du produit d'un vecteur par un scalaire est de juxtaposer les symboles représentant les deux facteurs : $2\vec{V}$, $4/5\,\vec{V}$, $m\vec{V}$.

(1) MM. Bachelier (Besançon), Beghin (Lille), Bouligand (Poitiers), Cartan (Sorbonne), Cerf (Strasbourg), Chaudier (Besançon), Chipart (St-Etienne), Deltheil (Toulouse), Dulac et Eyraud (Lyon), Haag (Besançon), Hadamard (Collège de France), Janet (Caen), Julia (Sorbonne), Kampé de Fériet (Lille), Montel (Sorbonne), P. Lévy (Ecole Polytechnique), Thiry (Strasbourg), Trousset (Bordeaux), Vessiot (Directeur de l'Ecole Normale Supérieure).

Mais, à mon avis, il n'y a aucun inconvénient à adopter le point . (ou la croix $\times$) comme symbole de cette opération — étant entendu que ce signe sera presque toujours supprimé en pratique — et à adopter le même signe pour l'une ou l'autre des multiplications vectorielles proprement dites.

Du reste, si l'on voulait entrer entièrement dans ces vues, il faudrait s'interdire d'employer dans les questions vectorielles les signes . et $\times$ déjà employés en algèbre (car des produits de nombres, de scalaires, peuvent intervenir dans des formules en même temps que des opérations vectorielles) et créer alors d'autres symboles pour les « multiplications » ou interviennent des vecteurs. Or, je pense que tout le monde est d'accord pour n'introduire qu'avec la plus grande discrétion des signes nouveaux. L'essentiel est que l'opération que l'on fait intervenir dans un raisonnement soit représentée d'une façon nette, et pour la multiplication d'un vecteur par un scalaire, l'opération est avant tout *symbolisée* par la juxtaposition des signes représentant le scalaire et le vecteur, qui sont deux êtres mathématiques de natures différentes. Il n'en est évidemment pas de même pour deux vecteurs, puisque nous convenons de définir, à partir de deux vecteurs, deux « multiplications » essentiellement différentes.

En ce qui concerne les produits scalaire et vectoriel, la note publiée au *Bulletin* 53 rappelle brièvement quelques-unes des notations adoptées. Ne retenons ici que celles d'entre elles qui sont surtout employées en France : (le premier signe est employé pour le produit scalaire, le second pour le produit vectoriel) :

$\cdot$	$\times$	GIBBS
$(\ )$	$[\ ]$	LORENTZ
$\times$	$\wedge$	BURALI-FORTI et MARCOLONGO
$\bar a\,\bar b$	$\overline{\bar a\,\bar b}$	LAFAY ($\bar a$ représentant le vecteur).

On peut être surpris de cette variété. M. HADAMARD, dans une intéressante lettre, fait remarquer que : « si aucune notation n'a triomphé, c'est que, toutes celles qui ont été proposées étant purement conventionnelles et artificielles, il n'y a aucune espèce de raison pour en préférer une ». Il ajoute : « Il y aurait donc lieu, à ce point de vue, d'en proposer une qui signifie autant que possible quelque chose. Or cela est possible. Le produit vectoriel est en effet une opération *axiale*, c'est à dire changeant de sens avec la disposition des axes coordonnés, Or on a pris l'habitude de désigner un vecteur axial par une flèche courbe $\circlearrowleft$. Il est hautement logique de choisir cette flèche courbe comme représentative de l'opération axiale qui nous intéresse de sorte que le produit vectoriel serait représenté par $\bar a \circlearrowleft \bar b$ ..... Mais si, comme je le suppose, vous n'éprouvez pas le besoin d'ajouter une notation nouvelle à la liste de celles qui existent déjà, je mettrai de côté l'idée qui a mes secrètes préférences. »

J'ai tenu à vous citer en détail ce passage de la lettre de M. HADAMARD, qui contient une suggestion tout à fait intéressante, et qui mérite réflexion.

Passons maintenant en revue des différentes notations signalées plus haut :

Dans une note précédente (*Bulletin* 53, p. 65), j'ai signalé l'inconvénient que présente — surtout pour nos élèves débutants — l'emploi de crochets et de parenthèses comme symbole des multiplications scalaire et vectorielle, les crochets et parenthèses étant d'usage constant pour représenter les résultats d'opérations algébriques ou vectorielles effectuées. C'est pour cette raison que notre Association a conseillé, il y a quelques années, la notation

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pour représenter un vecteur, de préférence à la notation (AB) qui était couramment utilisée autrefois. Les objections précédentes à l'emploi des parenthèses et des crochets sont soulignées par plusieurs de nos correspondants.

De mêmes, les flèches (ou traits) superposés dans la représentation du produit vectoriel semblent créer rapidement des complications d'écriture dans les combinaisons d'opérations. M. P. Lévy, professeur à l'Ecole Polytechnique note à ce sujet que le symbole $\overline{\overline{a}\,\overline{b}}$ peut éveiller l'idée qu'on fait d'abord le produit scalaire $\overline{a}\,\overline{b}$, et qu'on en déduit un vecteur.

Les notations de Gibbs sont employées en France depuis longtemps par plusieurs savants. Il est incontestable que cette question de priorité est très importante et M. Hadamard, dans la suite de la lettre dont je vous ai déjà cité des passages, souligne avec force ce point de vue : « En l'absence de raisons intrinsèques pour se décider dans un sens ou dans l'autre, il me paraît indiqué de s'attacher à l'école qui a rendu à la physique mathématique, dans l'ordre qui se rattache aux notations vectorielles, le plus de services. La désignation de cette école ne saurait pour moi faire de doute ; c'est, dans notre pays à tout le moins, celle de M. Langevin. Je me rallierais donc sans hésitation aux notations que M. Langevin utilise dans son article de *l'Encyclopédie des sciences mathématiques* sur ce sujet. » (Ces notations sont celles de Gibbs).

J'ai signalé dans le *Bulletin* 53 (p. 65) les objections d'ordre pédagogique qui peuvent être faites à l'emploi de la notation $\times$ pour le produit vectoriel. Je ne les redirai pas ici. Je ferai simplement observer que les raisons de cet ordre ont plus d'importance à l'heure actuelle qu'elles n'en avaient autrefois, car ces notions sont enseignées maintenant à des élèves plus nombreux, plus jeunes et dont la formation mathématique est encore rudimentaire. Du reste, il est bien certain que si les notations de Gibbs avaient été unanimement employées en France, en particulier dans l'enseignement supérieur, lorsque ces notions ont été introduites dans l'enseignement secondaire, elles auraient été adoptées d'emblée par nous, et les questions actuelles ne se poseraient sans doute pas. Mais l'unanimité n'était pas réalisée à ce point de vue et, à l'heure actuelle, nous avons à choisir.

Quant aux notations de Burali-Forti ($\times$ et $\wedge$), elles forment un système auquel on ne peut faire d'objection grave au point de vue logique ou pédagogique. Le principal grief formulé, en dehors bien entendu de la question de priorité dont je parlais plus haut, est que ces notations introduisent un symbole nouveau $\wedge$ pour le produit vectoriel, et qu'il ne faut pas abuser des signes nouveaux. Mais la « multiplication » vectorielle est justement une opération d'essence toute différente de l'autre et sa représentation par un signe nettement distinct n'a-t-elle pas au contraire l'avantage d'attirer l'attention des élèves, surtout des débutants, sur les propriétés particulières de l'opération ?

Toutefois, la majorité des correspondants qui nous ont envoyé leur avis ne se rallie pas entièrement au système des notations de Burali-Forti et adopte un système mixte : . (scalaire) et $\wedge$ (vectoriel). Je n'ai pas relevé d'objection grave faite à ce dernier système. En dehors de la remarque de M. Weber, dont j'ai parlé au début, certains collègues ont objecté : 1° que le point était trop peu visible, dans l'écriture, au tableau en particulier ; 2° que le point devait être réservé pour son rôle de séparateur, sans être immobilisé comme symbole d'une opération définie.

Je signale au contraire un avantage, qui me parait appréciable, présenté par ce système mixte : c'est qu'il concilie dans une certaine mesure les deux systèmes de Gibbs et de Burali-Forti, en adoptant le signe . de Gibbs pour le produit scalaire et le signe $\wedge$ de Burali-Forti pour le produit vectoriel. Ainsi les partisans de l'un ou l'autre des systèmes, qui voudraient se rallier à ces notations mixtes, n'auraient qu'une seule de leurs notations à modifier. (Il est bien entendu que le point . pourrait être supprimé dans la représentation du produit scalaire — comme du reste les flèches surlignant les lettres représentant des vecteurs, et plus généralement tout autre signe — toutes les fois qu'il n'y a aucune confusion à craindre).

Voici, pour terminer, quelques renseignements numériques : nous avons reçu dix-neuf réponses de professeurs de l'enseignement supérieur et trente-sept lettres de professeurs de l'enseignement secondaire. Le tableau suivant indique comment les avis se répartissent.

	Produit scalaire					Produit vectoriel				
	.	$\times$	. ou $\times$	( )	divers	$\wedge$	$\times$	[ ]	$\overline{\vec{a}\ \vec{b}}$	$\overline{\vec{a} \mid \vec{b}}$
Ens[t] supérieur	11	3	1	4		12	2	5		
Ens[t] secondaire	23	6	5	1	2	25	6	1	2	3

En résumé il semble se dégager des indications reçues jusqu'à présent une majorité favorable à l'adoption des signes . et $\wedge$. Mais certaines réponses ne nous sont pas encore parvenues et il serait prématuré d'émettre un vote décisif dès maintenant.

Du reste, il est vivement désirable que des décisions de ce genre ne soient pas prises uniquement par ceux des membres de notre Association qui peuvent assister à l'Assemblée générale et que tous nos collègues puissent participer à la consultation. Je vous propose donc de remettre à l'année prochaine la décision définitive, pour que l'enquête puisse être complétée. Les renseignements nouveaux feront l'objet de notes au *Bulletin* dans le courant de l'année et les décisions à prendre pourront être résumées en quelques questions précises, qui seront publiées avant l'Assemblée générale, de façon que tous les intéressés puissent participer au vote.

A cette question se rattachent les notations relatives aux moments (par rapport à un point, un axe, etc.). Divers symboles ont été proposés, mais à mon avis, leur introduction n'est pas nécessaire et les abréviations $\mathrm{M}^t_o\overleftarrow{\mathrm{V}}$, $\mathrm{M}^t_{x'x}\overleftarrow{\mathrm{V}}$ sont suffisamment claires et ne sont pas plus compliquées à écrire que telles combinaisons de parenthèses et de virgules (1).

Les questions relatives aux notations vectorielles sont celles qui ont donné lieu à la majeure partie de la correspondance cette année. J'ai déjà retenu bien longtemps votre attention et je ne puis qu'indiquer très brièvement les autres communications reçues de nos collègues.

En premier lieu figure l'importante question relative aux symétries et aux déplacements. Le point de vue des transformations en géométrie prend de plus en plus d'importance dans l'enseignement et il y a un vocabulaire à

(1) Voir le *Bulletin* n° 25, pages 100 et 101.

préciser et à compléter dans cet ordre d'idées. Vous savez que la question a déjà été abordée dans le *Bulletin* n° 38, par M. Lhermitte. MM. Decerf et Thovert en proposent à nouveau l'étude, dans des notes communiquées à la veille de l'Assemblée générale. Les indications qu'elles contiennent trouveront place dans un prochain bulletin. Je souligne à nouveau l'intérêt de la question en priant ceux de nos collègues qui s'y intéressent de vouloir bien nous envoyer dès maintenant leur avis à ce sujet.

Dans un autre ordre d'idées, M. Thovert demande à l'Association de revenir sur son vote, relatif au terme de « nombres algébriques » pour désigner les nombres positifs, nuls et négatifs, le qualificatif algébrique prêtant à confusion. M. Thovert propose les mots de « nombres orientés ».

M. Thovert a également envoyé une note concernant l'emploi des mots « homologues » et « correspondants » dans le début de la géométrie et le terme « d'angles correspondants » qu'il remplacerait volontiers par un autre, — et une note relative aux mots « polyèdre » et « angle polyèdre ».

M. Lebel désirerait voir employer le terme de « nombres symétriques » plutôt que celui de « nombres opposés » et indique quelques défauts que lui paraît présenter la terminologie relative aux sommes géométriques, résultantes, résultantes générales, etc.

M. Delens pense qu'il serait désirable de donner un nom (activité par exemple) au produit scalaire du vecteur vitesse et du vecteur accélération, qu intervient dans certaines questions de cinématique.

La plupart de ces notes sont arrivées trop tard pour que l'étude puisse être faite aujourd'hui. Aussi me suis-je borné à vous énumérer les questions qu'elles posent, sans commentaires. Il est désirable que les communications de nos collègues à leur sujet — et, bien entendu, sur toutes questions de définitions et de notations — soient envoyées plusieurs mois avant les vacances de Pâques, afin que les questions posées ou les suggestions faites puissent être présentées dans différents numéros du *Bulletin*, au cours de l'année ; un échange de vues pourrait alors avoir lieu par l'intermédiaire du *Bulletin*, avant l'Assemblée générale, ce qui permettrait de préciser les questions à retenir et les solutions envisagées, et de mettre de l'ordre dans les discussions éventuelles.

Je termine ce trop long rapport en vous demandant, mes chers collègues, une participation active à notre enquête et en remerciant vivement ceux d'entre vous qui veulent bien nous apporter leur collaboration.

L'Assemblée générale s'associe aux remerciements adressés par le Président à M. Desforge, et, après quelques échanges de vues entre MM. Chenevier, Desforge, Hennequin, Thovert, Wéber, etc., elle reporte à l'année prochaine les décisions à prendre et renouvelle, comme les années précédentes, la résolution suivante :

L'Assemblée décide de continuer d'une façon permanente l'enquête ouverte sur la question des définitions de mots et des notations en mathématiques. Le Bureau est chargé de recueillir les communications relatives à cette enquête, de faire présenter chaque année un Rapport à l'Assemblée générale ordinaire et de lui soumettre, s'il y a lieu, un tableau des définitions de mots et des notations sur lesquelles l'entente semble pouvoir se faire. Ce tableau sera publié et l'emploi en sera conseillé.