

VI. Documents officiels

Copie classée première à la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) du Concours général des Lycées et Collèges en 1926

Le jury de correction du concours général de la classe de Mathématiques (composition de mathématiques) a estimé que la copie portant le n° 142, dont l'auteur est M. Hely, élève du lycée Voltaire (classe de M. Loye), mérite d'être publiée.

Le texte qui suit est conforme à l'original ; on s'est borné, en vue de la reproduction, à quelques rares corrections typographiques, tenant compte de lapsus évidents (1).

Les inexactitudes (celle de la quatrième partie est la plus grave) ou les lacunes (omission des translations, fin de la cinquième partie surtout) n'ont pas été relevées. L'importance du sens de l'angle de rotation a été — malgré une préoccupation fréquente — sous-estimée parfois, la vision directe de la figure n'ayant pas toujours été contrôlée : cela suffit à expliquer les erreurs. Quant aux lacunes, elles sont dues manifestement au temps limité dont disposait le candidat.

(1) Et aussi à grouper les figures disposées en marge de la copie aux emplacements indiqués.

Mais on remarquera, d'une façon générale, la marche rapide de l'exposition, la concision et la sobriété du langage : le début de la première partie et une bonne moitié de la cinquième atteignent, à ces divers points de vue, une perfection assez rare. La forme brève, donnée aux conclusions, est un des caractères d'un esprit géométrique.

Le Président du Jury de correction,
E. BLUTEL.

Figures disposées en marge de la copie aux emplacements indiqués

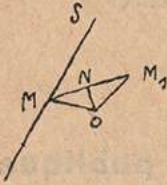


FIG. 1

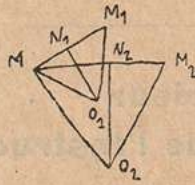


FIG. 5

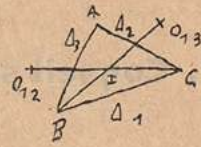


FIG. 9

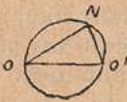


FIG. 2

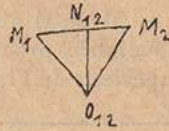


FIG. 6

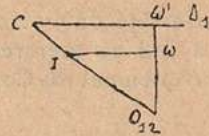


FIG. 10

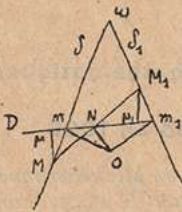


FIG. 3

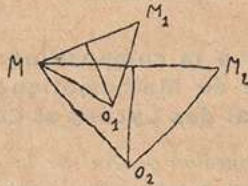


FIG. 7

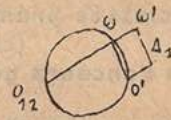


FIG. 11

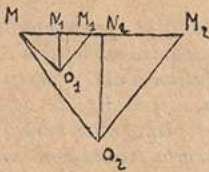


FIG. 4

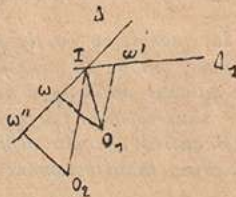


FIG. 8

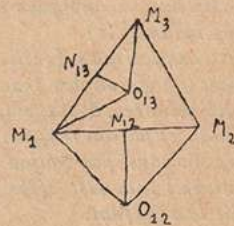


FIG. 12

On sait que tout déplacement d'une figure plane dans son plan est équivalent à une rotation ou une translation, celle-ci pouvant d'ailleurs être considérée comme une rotation dont le centre est à l'infini.

Fig. 1 I. Soit O le centre de la rotation qui amène le plan P en P_1 . O est fixe, et $\widehat{MOM_1}$, l'angle de rotation, l'est aussi. Le triangle MOM_1 est isocèle, et la projection N de O sur MM_1 en est le milieu. Lorsque M se déplace sur la droite δ , N , qui lui correspond dans une similitude de centre O , d'angle $\widehat{MON} = \frac{\widehat{MOM_1}}{2}$ et de rapport $\frac{ON}{OM}$ se déplace sur une droite déduite de δ par la même similitude.

La droite MM_1 , constamment perpendiculaire à ON en son point commun N avec la droite-lieu de N enveloppe une parabole de foyer O qui a pour tangente au sommet la droite-lieu de N .

Fig. 2 Si M décrit un cercle au lieu d'une droite, le même raisonnement montre que N décrit un cercle déduit du lieu de M par la similitude énoncée plus haut, et que MM_1 , constamment perpendiculaire à ON en son point commun N avec le cercle-lieu de N , enveloppe une ellipse, une hyperbole ou un point, selon que O est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur le cercle-lieu de N , ou, ce qui revient au même, le cercle-lieu de M . (Si O est sur le lieu de N , et si O' est diamétralement opposé à O sur ce cercle, la perpendiculaire en N à ON se confond en effet avec NO' , puisque $\widehat{ONO'} = \frac{\pi}{2}$.)

Fig. 3 Quand M décrit une droite δ , M_1 décrit la droite δ_1 correspondante du plan P_1 , droite située à égale distance du centre de rotation O que δ . Le lieu D de N est une droite qui passe par les projections m et m_1 de O sur δ et δ_1 , car m et m_1 , projections du foyer de la parabole-enveloppe de MM_1 sur δ et δ_1 (qui sont des tangentes, car, lorsque M ou M_1 vient au point de rencontre de δ et δ_1 , MM_1 vient en δ_1 ou en δ). D ou mm_1 , la tangente au sommet, est une position de MM_1 , et m et m_1 se correspondent : par suite, mM est égal au segment correspondant m_1M_1 . Si μ et μ_1 sont les projections de M et M_1 sur D , les triangles rectangles $M\mu m$ et $M_1\mu_1 m_1$, dont les hypoténuses sont égales, ainsi que les angles en m et m_1 puisque le triangle mOm_1 est isocèle, sont égaux (N étant le milieu de MM_1 ; on pourrait encore dire que $\mu M = \mu_1 M_1$). Par suite, $\mu m = \mu_1 m_1$ et $\mu m + m\mu_1 = m\mu_1 + \mu_1 m$ ou $\mu\mu_1 = mm_1$, ce qui démontre bien que la projection de MM_1 sur D est constante.

Fig. 4 II. Soient O_1 et O_2 les centres des rotations qui amènent P en P_1 et P_2 , et désignons par N_1 et N_2 les milieux de MM_1 et MM_2 . $\widehat{MO_1N_1}$ et $\widehat{MO_2N_2}$ sont constants comme étant les demi-angles de rotation, et il en est de même de leurs compléments $\widehat{O_1MN_1}$ et $\widehat{O_2MN_2}$. Si M ,

M_1 et M_2 sont en ligne droite, $\overline{O_1MO_2}$ est la différence ou la somme de $\overline{O_1MN_1}$ et $\overline{O_2MN_2}$, selon que les 2 rotations sont ou non de même sens. Dans les 2 cas, le lieu de M , d'où l'on voit O_1O_2 sous un angle constant, est un cercle.

N_1 se déduit de M par une similitude de centre O_1 d'angle $\widehat{MO_1N_1}$ et de rapport $\frac{O_1N_1}{O_1M}$. Le lieu de M étant un cercle qui passe par O_1 , il en est de même du lieu de N_1 , et la droite MM_1M_2 , perpendiculaire en N_1 à O_1N_1 , enveloppe un point, puisque O_1 est sur le cercle-lieu de N_1 . Si $\frac{MM_1}{MM_2} = k$, $\frac{MN_1}{MN_2} = k$. Or, $MO_1 = \frac{MN_1}{\sin \widehat{MO_1N_1}}$, $MO_2 = \frac{MN_2}{\sin \widehat{MO_2N_2}}$.
Donc : $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{MN_1}{MN_2} \frac{\sin \widehat{MO_2N_2}}{\sin \widehat{MO_1N_1}} = C^{te}$.

Le lieu de M est donc un cercle Γ dont le centre est sur O_1O_2 .

Connaissant le lieu de M , on en déduit ceux de N_1 et N_2 par similitude. Ce sont des cercles, à l'intérieur desquels se trouve l'un des points O_1 et O_2 , puisque l'un de ces points est forcément à l'intérieur du cercle Γ . Donc, les enveloppes de MM_1 et MM_2 sont, l'une une ellipse, l'autre une hyperbole.

Le lieu de M_1 se déduit de celui de M par la rotation qui amène P en P_1 . Ce lieu est donc un cercle. Si O_{12} est le centre de la rotation qui amène P_1 en P_2 , et si N_{12} est le milieu de M_1M_2 , le lieu de N_{12} se déduit de celui de M_1 par une similitude de centre O_{12} . C'est encore un cercle. Enfin, comme M_1M_2 est perpendiculaire à $O_{12}N_{12}$ en N_{12} , l'enveloppe de M_1M_2 est une ellipse, une hyperbole ou un point, selon la position de O_1O_2 par rapport au cercle-lieu de N_{12} .

Le cercle Γ passe par O_1 et O_2 , le cercle Γ' a son centre γ' sur O_1O_2 et coupe O_1O_2 en 2 points conjugués harmoniques par rapport à O_1 et O_2 , soient ω_1 et ω_2 . On a donc : $\overline{\gamma'\omega_1}^2 = \overline{\gamma'O_1} \cdot \overline{\gamma'O_2}$, ce qui montre que la tangente menée par γ' à Γ , dont la longueur est la racine carrée de la puissance $\overline{\gamma'\omega_1}^2$ de γ' dans Γ , est égale au rayon $\gamma'\omega_1$ de Γ' . La tangente au cercle Γ menée par γ' a son point de contact sur Γ' , ce qui montre que Γ et Γ' sont orthogonaux, puisque la tangente à l'un en un point commun est le rayon de l'autre.

Si $\overline{M_1MM_2}$ est constant, $\overline{O_1MO_2}$ est aussi constant. Dans le cas de la figure, il est en effet égal à $\overline{O_2MM_2} + \overline{M_2MM_1} - \overline{O_1MM_1}$, et tous ces angles sont constants. Le lieu de M est donc un cercle qui passe par O_1 et O_2 .

III. Pour que le triangle M_1MM_2 soit équilatéral, on doit avoir $\frac{MM_1}{MM_2} = 1$ et $\overline{M_1MM_2} = 60^\circ$. Puisque $\frac{MM_1}{MM_2} = 1$, M se trouve d'une part sur un cercle Γ' , et, puisque $\overline{M_1MM_2} = 60^\circ$, il se trouve encore

sur le cercle-lieu des points d'où l'on voit O_1O_2 sous un angle constant (qui peut avoir 2 valeurs selon l'orientation de $\widehat{M_1MM_2}$). Le point M est donc à l'intersection des cercles trouvés.

Nous avons trouvé que pour avoir M, M_1 et M_2 en ligne droite, on devait choisir M sur un certain cercle. Pour que M, M_1 et M_3 soient en ligne droite, M doit se trouver sur un second cercle, et pour que M, M_1 , M_2 et M_3 soient en ligne droite, il suffit de choisir M à l'intersection de ces 2 cercles.

Fig. 8

IV. Si Δ est une droite du plan P et ω la projection de O_1 sur cette droite, on aura la droite Δ_1 correspondant à Δ en faisant tourner ωO_1 , puis en prenant Δ_1 perpendiculaire à la nouvelle position de ωO_1 . O_1 , équidistant de Δ et Δ_1 , est sur une bissectrice et en désignant par I le point de concours de Δ et Δ_1 , on voit que $\widehat{\omega O_1 I}$, le demi-angle de rotation, est constant, ainsi que son complément $\widehat{\omega I O_1}$. La droite Δ_2 qui correspond à Δ dans la rotation qui amène P sur P_2 passera donc par I si de ce point on voit $\omega'' O_2$ sous l'angle complémentaire du demi-angle de la rotation (P, P_2). Par suite, $\widehat{O_2 I O_1}$ est égal à la différence des angles constants $\widehat{\omega I O_1}$ et $\widehat{\omega'' I O_2}$, et Δ, Δ_1 et Δ_2 concourront si I appartient à un certain cercle passant par O_1 et O_2 , Σ . D'après sa définition, ce cercle n'est autre que le cercle Γ .

Connaissant le lieu de I, on a celui de ω par une similitude de centre O_1 , puisque le triangle rectangle $I \omega O_1$ est de forme connue. Le lieu de ω est donc un cercle, qui passa par O_1 puisque Σ y passe aussi, et la droite Δ , perpendiculaire à ωO_1 en ω enveloppe un point, puisque le lieu de ω passe par O_1 .

Pour que $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ concourent, Δ doit passer par un certain point. Pour que Δ, Δ_1 et Δ_3 concourent, elle doit passer par un autre point. Donc, pour que $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ concourent, Δ doit joindre les 2 points fixes.

Fig. 9

V. Soient O_{12}, O_{13} les centres des rotations qui amènent P_1 en P_2 et en P_3 , ou Δ_1 en Δ_2 et en Δ_3 . Remarquons que les angles de Δ_1 et Δ_2 , Δ_2 et Δ_3 , Δ_3 et Δ_1 , sont égaux aux angles des rotations (P_1, P_2), (P_2, P_3), (P_3, P_1). Le triangle formé par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ a donc une forme constante. O_{12} , équidistant de Δ_1 et Δ_2 , se trouve sur l'une des bissectrices. De même, O_{13} se trouve sur une bissectrice de Δ_1 et Δ_3 . Pour que le triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, qui a une forme constante, ait une aire constante, il doit être égal à un certain triangle ABC, dont on connaît par conséquent l'angle des bissectrices CO_{12} et BO_{13} . Le lieu de I est donc

Fig. 10

Fig. 11

un cercle qui passe par O_{12} et O_{13} . IC est connu ($\widehat{IC, \Delta_1}$) aussi. Si ω' et ω sont les projections de O_{12} sur Δ_1 et une parallèle à Δ_1 menée par I, ω se déduit de I par une similitude de centre O_{12} , puisque le triangle rectangle $I \omega O_{12}$ a une forme connue, et son lieu est un cercle qui passe par O_{12} , puisque le lieu de I passe par O_{12} . Dans le cercle-lieu de ω , la

perpendiculaire en ω à $O_{12}\omega$ passe par le point O' diamétralement opposé à O , et comme $\omega\omega'$ est constant et égal à $CI \cos \widehat{IO_{12}\omega}$, Δ_1 est à une distance constante de O' et enveloppe un cercle admettant ce point pour centre. Or, Δ_1 se déduit de Δ par la rotation (P, P_1) . L'enveloppe de Δ est donc un cercle qui se déduit de l'enveloppe de Δ_1 par la rotation inverse. Il est à remarquer qu'on a plusieurs cas de figures selon que les centres de rotation sont sur les bissectrices intérieures, extérieures de ABC . Si O_{12} , O_{13} et O_{23} étaient assujettis à être tous 3 sur les bissectrices intérieures, le point I , le triangle et la droite Δ seraient déterminés.

Fig. 12

Soient N_{12} et N_{13} , les projections de O_{12} et O_{13} sur M_1M_2 et M_1M_3 ou les milieux de ces segments. L'aire du triangle $M_1M_2M_3$ a pour expression :

$$S = \frac{M_1M_2 \cdot M_1M_3 \sin \widehat{M_2M_1M_3}}{2} \quad \text{ou} \quad 2 M_1N_{13} \cdot M_1N_{12} \sin \widehat{M_2M_1M_3}.$$

Posons : $(M_1O_{12}, M_1N_{12}) = \alpha_2$, $(M_1O_{13}, M_1N_{13}) = \alpha_3$, $(M_1O_{12}, M_1O_{23}) = \alpha$. α_2 et α_3 sont connus, et : $(M_1M_2, M_1M_3) = \alpha + \alpha_3 - \alpha_2$. Désignons par d_2 et d_3 M_1O_{12} et M_1O_{13} . On a : $M_1N_{13} = d_3 \cos \alpha_3$, $M_1N_{12} = d_2 \cos \alpha_2$, $\sin \widehat{M_2M_1M_3} = \sin (\alpha + \alpha_3 - \alpha_2)$. Par suite :

$$\begin{aligned} S &= 2 d_2 d_3 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin (\alpha + \alpha_3 - \alpha_2) \\ &= 2 d_2 d_3 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 [\sin \alpha \cos (\alpha_3 - \alpha_2) + \cos \alpha \sin (\alpha_3 - \alpha_2)] \\ &= d_2 d_3 (k \sin \alpha + k' \cos \alpha). \end{aligned}$$

Si $S = 0$, on a $\operatorname{tg} \alpha = C^e$, et le lieu de M_1 est un cercle passant par O_{12} et O_{13} . Le lieu de M s'en déduit par la rotation (P_1, P) .