

9. Rapport sur la composition de mathématiques
(Classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1926

285 copies ont été remises. Le nombre de celles qui ne contiennent rien — 27 —, ou de celles où le problème (1) est à peine abordé, est encore trop considérable. En fait, une quarantaine contiennent des essais sérieux. Trente ont été retenues en vue du classement et 15 ont été récompensées.

Celles qui ont obtenu le 1^{er}, le 2^e et le 3^e prix ont été l'objet de propositions unanimes, de la part du Jury de correction.

Le premier accessit a réuni tous les suffrages, sauf un. A partir du second, c'est une simple moyenne de notes qui a décidé et encore les valeurs des copies différent-elles fort peu. C'est ce qu'explique l'attribution du 10^e et dernier accessit à trois candidats.

Parmi les quinze autres copies non récompensées, quelques-unes approchent beaucoup de celles qui l'ont été.

Signalons quelques observations des correcteurs :

a) Abus de la géométrie analytique — cela ne concerne guère les trente copies retenues.

b) Les cas particuliers de la translation et de la symétrie par rapport à un point sont presque toujours négligés.

c) La notion de centre de rotation n'est pas bien dégagée en général.

d) Peu d'élèves saisissent les questions relatives à l'orientation du plan et au sens des angles.

e) La transformation par polaires réciproques est appliquée sans discernement.

f) Les finesses, les réponses précises que comportait le problème échappent aux élèves.

Cette dernière observation pourrait d'ailleurs s'appliquer aux divers concours où la géométrie joue un rôle : elle révèle un manque de curiosité très répandu.

(1) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1926*.

La copie classée avec le n° 1 se détache nettement des autres, et malgré des inexactitudes et des lacunes, elle a paru digne de la publication. C'est la seule où la cinquième partie ait été abordée avec fruit, et le problème y est traité presque en entier, dans les grandes lignes tout au moins. C'est assurément la meilleure de toutes celles que le Concours général ait produites en mathématiques — dans la classe de Mathématiques — depuis son rétablissement.

Il n'est pas inutile de reprendre l'analyse du sujet, pour faire saillir la variété, les finesses et les difficultés des questions qu'il pose. Une solution complète, tenant compte des cas particuliers, entraînerait trop loin et n'aurait pas l'avantage de certaines indications générales ou de précisions relatives aux points délicats.

Dans tout ce qui suit, l'énoncé du problème est mis en italique.

I. Soient P, P_1, P_2, P_3 des positions successives d'un plan mobile qui glisse sur un plan fixe. Un point M du plan P a, dans P_1, P_2, P_3 , les positions M_1, M_2, M_3 respectivement.

Le point M décrivant une droite du plan P , trouver le lieu D du milieu de MM_1 et l'enveloppe de la droite MM_1 (On appelle enveloppe d'une famille de droites, soit une courbe que touchent ces droites, soit un point par où elles passent).

Même question, le point M décrivant un cercle du plan P .

Ces questions sont classiques. Désignons par O_i le centre de la rotation (R_i) qui amène P en P_i , $2\alpha_i$ la mesure algébrique de cette rotation, le plan P qui sert de repère étant orienté; appelons de même O_{ij} le centre de la rotation (R_{ij}) qui amène P_i en P_j , et $2\alpha_{ij}$ l'amplitude de cette rotation. On sait que les angles 2α ne sont définis qu'à un multiple près de 2π et par suite les angles α à un multiple près de π .

M décrivant une courbe (μ) , son homologue M_1 décrit une courbe égale (μ_1) , qui se déduit de (μ) par la rotation (R_1) . Tout point L , qui partage MM_1 dans un rapport constant, décrit une courbe (λ) semblable à (μ) , le point double de la similitude étant O_1 . Si L est le milieu N de MM_1 , la droite O_1N est la hauteur du triangle isocèle MO_1M_1 , relative à la base MM_1 ; l'enveloppe de MM_1 est l'antipodaire du point O_1 par rapport à la courbe (ν) , lieu de N . On peut la définir autrement; prenons un cercle fondamental d'inversion (c) , arbitraire, de centre O_1 , et la courbe (ν') inverse de (ν) par rapport à (c) : l'enveloppe de MM_1 est la polaire réciproque de (ν') par rapport à (c) .

L'application au cas où (μ) est une droite ou un cercle est immédiate. Beaucoup de candidats ont donné l'expression du rapport de similitude de (ν) et (μ) sous la forme $\cos \alpha_1$; c'est exact, mais l'emploi de simples triangles rectangles ne suffit pas à justifier ce fait.

Montrer que la projection de MM_1 sur D est constante.

Cette question est sans difficulté. Quelques candidats ont rapproché le résultat de celui que fournit un théorème de PONCELET, dans le cas d'une parabole.

II. Trouver le lieu Γ du point M pour que M, M_1, M_2 soient situés en ligne droite. Quelle est alors l'enveloppe de la droite MM_1M_2 ?

Cherchons tout d'abord les liens qui existent entre les positions des centres de rotation O_1, O_2, O_{12} des plans P, P_1, P_2 deux à deux, et les angles de rotation correspondants. Il est commode de placer M sur O_1O_2 par exemple. Le point homologue M_1 est alors le symétrique de M par rapport à la droite O_1x_1 qui fait avec O_1O_2 l'angle α_1 ; de même M_2 est le symétrique de M par rapport à la droite O_2x_2 qui fait avec O_1O_2 l'angle α_2 . On voit de suite que l'axe du segment M_1M_2 passe par le point de rencontre de O_1x_1 et de O_2x_2 , lequel est indépendant de la position de M sur O_1O_2 et n'est autre que O_{12} ; en outre un angle des droites $O_{12}O_1$ et $O_{12}O_2$ est $\alpha_2 - \alpha_1$ et la rotation (R_{12}) a pour amplitude $2\alpha_2 - 2\alpha_1$.

Appelons γ le cercle circonscrit au triangle $O_1O_2O_{12}$; c'est le lieu des points Q tels que $(QO_1, QO_2) = \alpha_2 - \alpha_1$.

Si M, M_1, M_2 sont alignés, les perpendiculaires $O_1y_1, O_2y_2, O_{12}y_{12}$ abaissées de O_1, O_2, O_{12} respectivement sur la droite MM_1M_2 sont parallèles, et réciproquement. Il en résulte que l'un des angles des droites O_1M, O_2M , par exemple, a pour mesure $\alpha_1 - \alpha_2$. Cela place le point M sur le cercle Γ symétrique du cercle γ par rapport à la droite O_1O_2 . Dans les mêmes conditions, M_1 et M_2 décrivent respectivement les symétriques de γ par rapport aux droites O_1O_{12} et O_2O_{12} . Ces trois cercles passent par l'orthocentre H du triangle $O_1O_2O_{12}$.

Quand M décrit Γ , N se déplace sur un cercle C qui passe par O_1 ; la droite MM_1M_2 , perpendiculaire à O_1N , passe par le point diamétralement opposé à O_1 sur C . La tangente à Γ , en O_1 , résulte de O_1O_2 par une rotation d'amplitude $\alpha_2 - \alpha_1$ et la tangente à C s'obtient en faisant tourner la première d'un angle α_1 . Il en résulte que la tangente à C , en O_1 , est parallèle à O_2O_{12} . Le diamètre de C , qui passe par O_1 , est donc la hauteur O_1H du triangle $O_1O_2O_{12}$. Ainsi, la droite MM_1M_2 passe par un point fixe situé sur O_1H . Ce point fixe est de même sur les autres hauteurs du triangle : ce ne peut être que le point H .

Ces résultats s'obtiennent beaucoup plus vite si l'on remplace les rotations par des symétries. M étant un point quelconque du plan P , construisons son symétrique m par rapport à O_1O_2 ; les symétriques de m par rapport à O_1x_1 et O_2x_2 sont précisément les points M_1 et M_2 .

Le lieu du point m , tel que ses symétriques M, M_1, M_2 , par rapport aux côtés du triangle $O_1O_2O_{12}$ soient alignés, est le cercle γ circonscrit au triangle et on sait que la droite MM_1M_2 passe par l'orthocentre de ce triangle. Les lieux de M, M_1, M_2 , sont les symétriques du lieu de m , c'est-à-dire de γ , par rapport aux divers côtés du triangle.

Trouver le lieu Γ' de M pour que le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ soit constant. Dans ce cas, que sont les enveloppes des côtés du triangle MM_1M_2 ? Sous quel angle se coupent Γ et Γ' ?

Cherchons d'abord le lieu du point m . Soient n, n_1, n_2 les projections respectives de m sur $O_1O_2, O_1O_{12}, O_2O_{12}$. Les côtés du triangle nn_1n_2

sont les moitiés des côtés du triangle MM_1M_2 , de sorte que $\frac{nn_1}{nn_2} = k$.

Le cercle décrit sur mO_1 comme diamètre passe par n et n_1 , si bien que $nn_1 = mO_1 |\sin \alpha_1|$. De même $nn_2 = mO_2 |\sin \alpha_2|$ et $\frac{mO_1}{mO_2} = k \frac{|\sin \alpha_2|}{|\sin \alpha_1|}$. Le lieu de m est donc un cercle orthogonal à la droite O_1O_2 et qui partage harmoniquement le segment O_1O_2 . C'est aussi le lieu de M , c'est-à-dire le cercle Γ' et ce cercle est orthogonal à tout cercle qui passe par O_1 et O_2 , et par suite à Γ . Les lieux de M_1 et de M_2 sont respectivement les cercles Γ'_1 et Γ'_2 , symétriques de Γ' par rapport à O_1O_{12} et O_2O_{12} .

Des deux sommets O_1 et O_2 , l'un est à l'extérieur du cercle Γ' , l'autre est à l'intérieur ; supposons par exemple que O_2 soit à l'intérieur. Alors O_1 est à l'extérieur du cercle lieu du milieu de MM_1 et la droite MM_1 enveloppe une hyperbole ; O_2 est à l'intérieur du cercle lieu du milieu de MM_2 et la droite MM_2 enveloppe une ellipse. La droite O_2O_{12} est l'axe radical de Γ' et Γ'_2 de sorte que O_{12} est, simultanément, soit à l'intérieur soit à l'extérieur de ces deux cercles. Dans le premier cas, M_1M_2 enveloppe une ellipse, dans le second une hyperbole.

En résumé, il y aura autant d'ellipses enveloppes des côtés du triangle MM_1M_2 qu'il y a de sommets (1 ou 2) du triangle $O_1O_2O_{12}$ à l'intérieur du cercle Γ' .

Le passage d'un cas à l'autre se fait lorsque Γ' passe par O_{12} . Mais alors $\frac{MO_1}{MO_2}$ est égal à $\frac{O_{12}O_1}{O_{12}O_2}$ ou $\left| \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \right|$, de sorte que k vaut 1. Ainsi le lieu de M tel que le triangle M_1MM_2 soit isocèle est le cercle Γ'_0 , qui passe par O_{12} , est orthogonal à la droite O_1O_2 et partage harmoniquement le segment O_1O_2 . Il passe par les pieds des bissectrices de l'angle en O_{12} sur le côté opposé O_1O_2 .

Trouver le lieu de M pour que l'angle M_1MM_2 soit constant.

Il faut, au préalable, définir ce qu'on entend par « l'angle M_1MM_2 » : c'est ce que n'ont pas fait la plupart des concurrents.

Ce peut être l'angle des droites MM_1 , MM_2 , dans le plan orienté, ou l'angle des demi-droites MM_1 , MM_2 , le plan étant toujours orienté, ou encore l'angle en M du triangle MM_1M_2 au sens habituel. Quelle que soit la définition adoptée, il est manifeste que les points O_1 et O_2 appartiennent au lieu ; car, si M vient en O_1 ou en O_2 le segment MM_1 ou MM_2 est de longueur nulle et la direction de la droite qui le porte est indéterminé. Cette même raison explique pourquoi Γ' passe par O_1 et O_2 . Dans tous les cas, on est ramené à trouver le lieu du point m tel que l'angle n_1nn_2 soit constant, puisque le triangle n_1nn_2 est homothétique du triangle M_1MM_2 , par rapport au centre d'homothétie

m , avec le rapport $\frac{1}{2}$.

Prenons la première interprétation. L'emploi des cercles décrits sur O_1m et O_2m comme diamètres donne les égalités :

$(nm, nn_1) = (O_2m, O_2O_{12})$; $(nm, nn_2) = (O_1m, O_1O_{12})$; à $k\pi$ près bien entendu. Il en résulte par soustraction :

$(nn_1, nn_2) = (O_1m, O_2m) + (O_2O_{12}, O_1O_{12})$; par suite :
 $(O_1m, O_2m) = (nn_1, nn_2) + (O_1O_{12}, O_2O_{12}) = (nn_1, nn_2) + \alpha_2 - \alpha_1 = C^{16}$.

Le lieu du point m est donc un cercle c qui passe par O_1 et O_2 ; celui de M est le cercle C symétrique de c par rapport à O_1O_2 , ceux de M_1 et M_2 sont respectivement les symétriques de c par rapport à O_1O_{12} et O_2O_{12} .

Dans le second cas, la constante n'a encore qu'une valeur algébrique, mais un seul arc du cercle C , limité aux points O_1 et O_2 , satisfait aux conditions imposées à l'angle M_1MM_2 .

Dans le troisième cas, si β est la mesure de l'angle en M du triangle M_1MM_2 , la constante a deux valeurs distinctes $\alpha_2 - \alpha_1 \pm \beta$. Le lieu de M se compose alors de deux arcs de cercles, limités aux points O_1 et O_2 .

III. Déterminer M pour que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral ou pour que les quatre points $MM_1M_2M_3$ soient en ligne droite.

Pour que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral, il faut et il suffit que :

1° MM_1 et MM_2 aient même longueur, ce qui place M sur le cercle Γ_0 déjà trouvé ;

2° L'angle en M du triangle M_1MM_2 ait pour mesure $\frac{\pi}{6}$. Cela exige que M soit sur l'un ou l'autre des segments qui correspondent à $\beta = \frac{\pi}{3}$. Les points de rencontre de Γ_0 avec la droite O_1O_2 étant l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du segment O_1O_2 , le cercle Γ_0 rencontre chacun des segments précités en un point : il y a donc deux triangles équilatéraux.

Pour que M, M_1, M_2 soient alignés, il faut que M soit sur un cercle Γ , qui passe par O_1 et O_2 . Pour que M, M_1, M_3 le soient, il faut que M soit sur un cercle passant par O_1 et O_3 . Ces cercles passant tous deux par O_1 se coupent en général en un autre point où il faudra placer M pour que M, M_1, M_2, M_3 soient alignés. La droite $MM_1M_2M_3$ passe alors par les orthocentres respectifs des triangles $O_1O_2O_{12}$, $O_1O_3O_{13}$, $O_2O_3O_{23}$, $O_{12}O_{13}O_{23}$.

IV. Une droite Δ du plan P a dans P_1, P_2, P_3 , les positions respectives $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Que doit être l'enveloppe de Δ pour que $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ concourent ? Trouver le lieu Σ de leur point de concours. Quelle relation présente Σ avec le lieu Γ ?

O_1 est le centre d'un cercle tangent à Δ et Δ_1 . Si I est le point de rencontre de ces deux droites, on a : $(\Delta, IO_1) = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$.

Si Δ_2 passe par I , on a de même : $(\Delta, IO_2) = \frac{\pi}{2} + \alpha_2$. Par suite

$(IO_1, IO_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ et le point I est sur le cercle γ . Σ n'est donc autre que γ , c'est-à-dire le cercle symétrique de Γ par rapport à O_1O_2 .

Le lieu de I étant un cercle qui passe par O_1 et (IO_1, Δ) étant égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, Δ coupe γ en un point fixe ω qui est son enveloppe. Si on place I en O_{12} , la droite Δ correspondante est la perpendiculaire abaissée de O_{12} sur O_1O_2 . Le point ω est donc le symétrique de l'orthocentre H du triangle $O_1O_2O_{12}$ par rapport à O_1O_2 . Dans ces conditions, les droites Δ_1 et Δ_2 passent respectivement par les symétriques ω_1 et ω_2 de H par rapport à O_1O_{12} et O_2O_{12} . La vérification est d'ailleurs facile, une fois le résultat trouvé.

Déterminer Δ de manière que $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ soient concourantes.

De même que précédemment, $\Delta, \Delta_1, \Delta_3$ concourent lorsque Δ passe par le symétrique ω' de l'orthocentre du triangle $O_1O_3O_{13}$ par rapport à O_1O_3 . Ainsi, la droite $\omega\omega'$ est la seule position de Δ pour laquelle les quatre droites $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ concourent.

V. *Trouver l'enveloppe de Δ pour que le triangle formé par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, ait une aire constante.*

On pourrait aussi bien chercher l'enveloppe de Δ_3 quand le triangle formé par $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$, a une aire constante. Comme l'enveloppe de Δ_3 se déduit de celle de Δ par la rotation (R_3) , on peut donc se borner à chercher l'enveloppe de Δ quand le triangle formé par $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ a une aire constante. Soient A, A_2, A_3 les sommets correspondants aux côtés $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$, du triangle. Les trois droites $O_1A_2, O_2A_1, O_{12}A$ sont bissectrices respectives des angles en A_2, A_1, A . Elles se coupent en un point J tel que $(JO_1, JO_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ et le point J est sur γ . La parallèle JJ' à Δ menée par J fait avec JO_1 un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$. Elle

rencontre γ en un point fixe ω déjà trouvé. Par suite la distance du point ω à Δ est la même que celle de J à cette droite. Or J est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$. Si ce triangle a une aire constante, comme il est toujours semblable à l'une de ses positions, il est de grandeur invariable et la distance précitée est constante. L'enveloppe de Δ est donc un cercle de centre ω . Dans les mêmes conditions, δ enveloppe le cercle symétrique du précédent par rapport à O_1O_2 ; son centre est en H. Enfin les enveloppes de Δ_1 et Δ_2 sont deux autres cercles symétriques respectivement de l'enveloppe de δ par rapport aux deux autres côtés du triangle $O_1O_2O_{12}$; ils ont pour centres respectifs ω_1 et ω_2 .

Quel est le lieu de M pour que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ soit constante ?

On peut aussi bien traiter le problème en supposant constante l'aire du triangle MM_1M_2 . Cherchons d'abord le lieu du point m dans ces conditions. L'aire du triangle mn_1n_2 déjà rencontré est le quart de celle du triangle MM_1M_2 . Or l'aire du premier ne dépend que de la distance d du point m au centre de γ . Soient R le rayon de γ , A la mesure de l'aire du triangle $O_1O_2O_{12}$. Quand d croît de 0 à R, la

mesure de l'aire du triangle MM_1M_2 décroît de A à 0 et, quand d croît à partir de R , elle croît de 0 à l'infini. Suivant que la mesure de l'aire MM_1M_2 est inférieure ou supérieure à A , le lieu de m se compose de deux cercles ou d'un seul, concentriques à γ . Les lieux respectifs de M , M_1 , M_2 sont les cercles symétriques des précédents par rapport aux côtés du triangle $O_1O_2O_{12}$.

Bien que cette analyse soit incomplète, on a pu se rendre compte, à diverses reprises, combien il importe de donner aux résultats une forme précise, définitive si possible. Dire, par exemple, qu'une droite passe par un point fixe ou qu'un lieu géométrique est un cercle ne constitue qu'une réponse provisoire, tant qu'on n'a pas situé le point ou le cercle par rapport aux données. Non seulement une solution imprécise d'une partie d'un problème ne satisfait pas l'esprit, mais surtout elle ne prépare pas la recherche ultérieure. L'énoncé d'un problème qui doit être traité dans un temps limité pose une série de questions dont les liens n'apparaissent guère : c'est une nécessité du genre. Tant que ces liens ne sont pas mis en évidence, le problème n'est pas vraiment traité. La vision en est singulièrement facilitée par la mise au point des résultats partiels, au fur et à mesure qu'ils sont obtenus, et la découverte en bénéficie largement. Le principal objet de cette étude a été d'en donner un exemple.

Le Président du Jury,
E. BLUTEL.