

**10. Rapport sur la composition de mathématiques
(Classe de Première C-D)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1927**

La composition a été abordée par 426 concurrents. Relevons de suite, en ce qui concerne les meilleurs sujets, la qualité remarquable du concours. Après une première élimination, près de 50 copies ont été retenues, qui méritaient un examen approfondi; si douze d'entre elles seulement ont été récompensées, alors que le règlement accorde treize nominations, c'est que ces douze premières marquaient une supériorité bien nette sur les suivantes, et que se présentaient ensuite, en tête de celles-ci, cinq copies dont la valeur, sensiblement la même, rendait le classement difficile; mais, à supposer que les douze lauréats n'aient pas pris part au concours, le jury n'aurait pas été embarrassé pour désigner, parmi les autres, treize sujets dignes d'être récompensés. Les deux premières compositions affirment leur supériorité par leur logique simple, élégante, irrésistible, qui conduit le lecteur, sans une omission, sans un faux pas, jusqu'au dernier terme de la question pour l'une, jusqu'à l'avant dernier mot pour l'autre. « On ne peut se défendre d'un sentiment d'admiration et même d'une certaine émotion, dit un correcteur, à la pensée qu'il s'agit du travail d'enfants de seize ans ». Les deux compositions suivantes, à part une défaillance plus sensible dans la dernière partie, témoignent d'un même équilibre dans la pensée, d'un même développement remarquable du sens critique et de l'esprit philosophique. Le travail de chacun de ces quatre élèves pourrait servir à démontrer, si cela était nécessaire, à quel point l'étude de la géométrie entraîne la rigueur des enchaînements logiques et la parfaite clarté de l'intelligence.

Suivons le texte proposé (1). « On donne deux points fixes A et B , et un nombre positif k , que l'on suppose, dans les deux premières parties du problème, différent de l'unité. Nous appellerons (Δ) toute droite de l'espace telle que le rapport des distances de A et B à (Δ) soit égal à k . On désignera par I et J les points de AB dont le rapport des distances à A et B est égal à k , par I' et J' les projections orthogonales de I et J sur (Δ) .

1° Montrer qu'on peut caractériser toute droite (Δ) par l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- a) le rapport des distances du point I' aux points A et B est égal à k ;
- b) les deux plans passant, l'un par (Δ) et I , l'autre par (Δ) et J , sont rectangulaires. »

La première proposition s'établit en projetant orthogonalement A, B, I, J en A', B', I', J' sur une droite quelconque (δ) . Sauf le cas où ces quatre projections se confondent, qui est celui où (δ) est perpendiculaire à AB , le théorème de Thalès pour l'espace donne

(1) Voir page 5 des Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1927.

$\frac{IA'}{IB'} = \frac{IA}{IB} = k$; d'autre part, les deux triangles $I'A'A$, $I'B'B$ sont rectangles en A' et B' ; si donc (δ) est une droite (Δ) , c'est que $\frac{AA'}{BB'} = \frac{IA'}{IB'}$, que ces deux triangles sont semblables, et que $\frac{IA}{IB}$ est bien égal à k . Réciproquement, si cette égalité a lieu, les mêmes triangles rectangles ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels ; ils sont semblables et on a : $\frac{AA'}{BB'} = \frac{IA'}{IB'} = k$.

Dans le cas réservé, IA et IB se confondent respectivement avec $A'A$ et $B'B$, et la proposition est manifeste.

Le second caractère s'établit directement en projetant la figure sur un plan perpendiculaire à (δ) ; celle-ci se projette en un point δ ; les distances de A et B à (δ) se conservent en projection suivent δA et δB , de même que le rapport des distances de I , comme de J , à A et B ; dans ces conditions, pour que (δ) soit une droite (Δ) , il faut et il suffit que, en projection, les points I et J soient les pieds des bissectrices de l'angle en δ du triangle δAB , ou encore que δI , δJ soient rectangulaires. C'est la proposition énoncée.

2° « On considère les droites (Δ) passant par un point fixe S , pris en dehors de AB ; montrer que le lieu des points I' correspondants est un cercle et le lieu des points J' un autre cercle. Trouver le lieu du point S , quand les deux cercles, lieux de I' et J' sont égaux, ou, plus généralement, ont leurs rayons dans un rapport donné ».

Pour qu'une droite (δ) soit une droite (Δ) , il faut et il suffit, d'après le premier caractère, que I soit sur la sphère de diamètre IJ ; pour qu'elle passe par S , il faut et il suffit que l'angle $SI'I$ soit droit, donc que I' soit sur la sphère de diamètre SI : d'où le lieu de I' , intersection des deux sphères, et celui de J' , déterminé de même manière.

Prenant pour plan de figure le plan SIJ , apparaissent trois sphères dont trois grands cercles, placés dans ce plan, ont pour diamètres IJ , SI , SJ ; SI et SJ coupent respectivement le premier en I et J , puis en deux autres points P et Q par lesquels passent aussi respectivement les deux autres cercles ; les deux lieux sont donc les deux cercles de diamètres IQ et JP , dont les plans sont perpendiculaires à celui de la figure. Or, les triangles rectangles SPJ , SQI sont semblables, ayant même angle en S , de sorte que les diamètres IQ , JP sont proportionnels aux distances SI , SJ ; le lieu demandé de S est donc le lieu connu, plan ou sphère, des points S dont les distances à I et J sont égales ou dans un rapport donné.

3° « On suppose maintenant $k = 1$. Que deviennent, dans ce cas, les propriétés caractéristiques des droites (Δ) ? Caractérisez, en particulier, toutes les droites (Δ) passant par un point donné S équidistant de A et B . Lieu des projections du milieu O de AB sur les droites (Δ) passant par un point quelconque S . Deux points différents peuvent-ils correspondre au même lieu ? »

Avec $k = 1$, un seul des deux points I, J, subsiste, devient le milieu O de AB, l'autre s'éloignant à l'infini. Le premier caractère se maintient, et s'établit de la même manière à cela près que O' étant la projection de O sur (Δ) , les triangles rectangles O'A'A, O'B'B sont égaux et non plus semblables, et que ce caractère se traduit par l'égalité des distances de O' à A et B.

Le second caractère s'établit encore en projetant sur un plan perpendiculaire à une droite quelconque (δ); la condition à remplir, égalité des distances δA , δB , est que la médiane δO du triangle δAB soit en même temps hauteur, c'est-à-dire que O soit le pied, sur AB, de la perpendiculaire commune à AB et (δ). Cet énoncé est resté, en général, inaperçu; le premier caractère, seul, pouvait, heureusement, intervenir dans la suite.

En effet, pour qu'une droite issue d'un point S, placé dans le plan médiateur de AB, soit une droite (Δ), il faut et il suffit, d'après le premier caractère, que O' soit aussi dans ce même plan médiateur, c'est-à-dire, suivant que O' sera distinct de S ou confondu avec S, que cette droite soit dans le plan médiateur, ou dans le plan perpendiculaire en S à SO, ceci à moins encore que S ne soit le point O lui-même auquel cas toute droite issue de ce point O est une droite (Δ).

Si S est un point quelconque de l'espace, le lieu des projections de O sur les droites (Δ) issues de ce point S, se détermine comme dans la deuxième partie : c'est l'intersection du plan médiateur de AB et de la sphère de diamètre OS, c'est-à-dire le cercle de ce plan médiateur ayant Os pour diamètre, s'étant la projection de S sur ce plan médiateur. De sorte que, un même cercle passant par O, situé dans ce plan médiateur, correspond à une infinité de points S, ceux de la droite parallèle à AB issue du point de ce cercle diamétralement opposé à O.

4° « On donne un triangle ABC. Soit T un point équidistant de A, B, C. Trouver toutes les droites issues de T qui passent à égale distance des points A, B, C. Examiner si l'on peut construire la position du point T de telle sorte que trois de ces droites forment un trièdre trirectangle. »

Le point T, par hypothèse, est sur la droite commune aux plans médiateurs des trois côtés du triangle ABC, axe du cercle circonscrit au triangle. Appliquons le caractère établi dans la 3^e partie; désignons par a , b , c les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle, par Ta' , Tb' , Tc' les parallèles à ces côtés issues de T; une droite issue de T est équidistante de A et B si elle est dans le plan médiateur de AB, ou dans le plan perpendiculaire en T à Ta' ; il est plus commode de dire si elle est perpendiculaire à Ta' ou à Ta ; de même elle est équidistante de A et C si elle est perpendiculaire à Tb' ou à Tb . Observons que les six droites Ta , Tb , Tc , Ta' , Tb' , Tc' sont toujours distinctes, sauf dans le cas où le triangle ABC est rectangle et où T est dans le plan de ce triangle, coïncidant avec le milieu de l'hypoténuse; ce cas écarté, on obtient ainsi quatre droites répondant à la question, et respectivement perpendiculaires aux plans $Ta'b'$, Tab , Tab' , $Ta'b$. Ces droites sont

nécessairement équidistantes de B et C, donc perpendiculaires à Tc' ou à Tc , ce qui se vérifie en constatant que Tc est dans les plans Tab' , $Ta'b$, car ac , par exemple, parallèle à Ac et à Tb' est nécessairement dans le plan Tab' ; Tc' , pour la même raison, est dans le plan Tab ; elle est en outre dans le plan $Ta'b'$, parallèle au plan du triangle. Les quatre droites obtenues sont donc les perpendiculaires aux plans $Ta'b'c'$, $Tabc'$, $Tab'c$, $Ta'bc$; la première est l'axe du cercle circonscrit à ABC.

Trois de ces droites peuvent-elles former un trièdre trirectangle? Pour qu'il en soit ainsi avec les trois dernières, il faut et il suffit que le trièdre $Tabc$, formé par les plans Tab , Tbc , Tca , qui leur sont respectivement perpendiculaires, soit aussi trirectangle, donc que T soit point commun aux trois sphères de diamètres ab , bc , ca . Or, ces trois sphères se coupent deux à deux suivant des cercles placés dans les trois plans médiateurs; on obtient donc deux points demandés T à l'intersection de l'une quelconque de ces trois sphères avec la droite commune aux plans médiateurs, axe du cercle circonscrit à ABC. Ces points existent à condition que le centre de ce cercle circonscrit, orthocentre du triangle abc soit intérieur à chacune des sphères, autrement dit que le triangle ABC ait tous ses angles aigus.

Dans une seconde et dernière solution l'une des trois droites formant un trièdre trirectangle est la première, axe du cercle circonscrit, les deux autres étant, par exemple, les perpendiculaires aux plans Tab , Tac . Pour que cette solution existe, il faut et il suffit que, d'une part, ces deux plans passent par la première droite, que d'autre part, ils soient rectangulaires; la première condition signifie que Ta se confond avec la première droite, ou que a est le centre du cercle circonscrit, ou enfin que le triangle ABC est rectangle en A; on constate alors que la seconde condition est conséquence de la première. La seconde solution n'existe donc que si le triangle ABC est rectangle, et tous les points T pris sur l'axe répondent à la question.

Nous retrouvons le cas écarté, celui où ABC est rectangle, en A par exemple, et où T coïncide avec le milieu a de l'hypoténuse BC. Ici, toute droite issue de B est équidistante de B et C; elle est donc équidistante de A, B, C si elle est équidistante de A et B, c'est-à-dire perpendiculaire soit à Tc , soit à Tb (parallèle à AB); il y a donc ici une infinité de droites, réparties dans deux plans, d'ailleurs rectangulaires, et avec ces droites, on peut former deux infinités de trièdres trirectangles, savoir ceux dont une arête est soit Tb , soit Tc .

En résumé, si le triangle ABC a un angle obtus, il n'y a pas de trièdre trirectangle répondant à la question; si tous ses angles sont aigus, il y en a deux; si le triangle est rectangle, il y en a trois infinités.

Comme on le voit la question peut être envisagée comme un thème sur la signification d'une condition nécessaire et suffisante. Les concurrents se classent, selon que cette signification est plus ou moins

comprise, observée. Dès les premières lignes, le mot « caractériser » indiquait qu'il s'agissait d'une condition nécessaire et suffisante. Or un très grand nombre se sont bornés à justifier le caractère nécessaire de l'une ou l'autre forme ; une des compositions récompensées a même commis cette faiblesse, qui l'a rejetée loin de la place à laquelle elle aurait pu prétendre après les deux premiers. Fait curieux, quelques-uns, qui ont été discutés d'ailleurs, ont établi seulement le caractère suffisant de la condition, rencontrant ainsi, et bien inutilement, des difficultés, et les résolvant au prix d'habiletés qui auraient gagné à s'exercer ailleurs.

Même thème, dans la seconde partie, avec les lieux des points I' et J', avec celui du point S, à propos desquels beaucoup se relâchent déjà et ne s'arrêtent plus qu'aux conditions nécessaires à remplir, observant, par exemple, que I'I, I'J sont rectangulaires, que I' est donc sur la sphère de diamètre IJ, sans dire qu'ils traduisent ainsi le premier caractère, et probablement, sans le soupçonner.

Même thème encore, à deux reprises, dans la troisième partie, et cette fois le relâchement s'accroît. Aussi, faute de serrer le caractère nécessaire et suffisant utilisé, nos concurrents ne trouvent-ils qu'un plan, sur deux, engendré par les droites (Δ). Plus loin, lorsqu'il s'agit de savoir si deux points S différents peuvent correspondre à un même lieu, une réponse fréquente, ne voyant qu'une condition suffisante à remplir, se contente d'indiquer deux points S symétriques par rapport au plan médiateur.

La quatrième partie est celle qui présente les plus lourdes faiblesses. Ici, la signification des mots : nécessaire et suffisant, est totalement perdue de vue. Ces faiblesses sont d'abord la conséquence de la solution incomplète, qui vient d'être signalée, de la 3^e partie ; souvent, elles aggravent la faute alors commise. Telles compositions mettent en évidence seulement les plans perpendiculaires aux droites Ta , Tb , Tc , acceptent comme solutions les intersections de ces plans deux à deux, sans s'apercevoir que leur raisonnement devrait aboutir à cette contradiction que ces trois plans devraient passer par une même droite. Deux sujets seulement ont bien marqué la disposition des différents plans se coupant suivant les droites demandées.

Puis, en ce qui concerne la recherche des trièdres trirectangles, les compositions récompensées ont aperçu au moins la possibilité de la première solution ; deux seulement ont discuté son existence. Celle de la seconde solution n'a été aperçue que par un seul, le lauréat du premier prix.

Autres observations à signaler. Dans l'application d'un théorème général se manifeste une tendance à n'utiliser qu'une conséquence, un caractère particulier de ce théorème. Ainsi, dans la première partie, le rapport des segments déterminée sur AB par I et J se conserve en projection sur la droite (Δ) ; cette conséquence immédiate du théorème de Thalès est établie trop souvent en appliquant le théorème des projections orthogonales, à grand renfort de cosinus, en

oubliant donc que projections et cosinus ne sont eux-mêmes que des conséquences du théorème de Thalès. Plus loin, au lieu d'utiliser la similitude de triangles rectangles, on utilise la relation de Pythagore, laquelle est une conséquence de cette similitude. Ailleurs encore, trop d'élèves établissent que $l'I$ et $l'J$ sont rectangulaires en observant que, le rapport des distances $l'A$, $l'B$ étant égal à k , le point l' se trouve sur le lieu connu, sphère de diamètre IJ , donc que $l'I$, $l'J$ sont rectangulaires, alors que, à l'origine de cette propriété, c'est parce que ces droites sont rectangulaires que l' est sur la sphère.

Les élèves, qui cependant éprouvent des difficultés à faire une figure de géométrie dans l'espace, ignorent qu'il y a souvent avantage à utiliser des projections faites sur des plans convenablement choisis. Cet avantage a été presque constamment négligé, alors qu'il était commode, ainsi que notre analyse l'a souligné, de projeter sur un plan perpendiculaire à (Δ) dans les 1^{re} et 3^e parties, sur le plan SIJ dans la 2^e, sur le plan médiateur de AB dans la 3^e, sur le plan ABC dans la dernière.

Relevons encore une orthographe négligée, des fautes grossières, telles que « hortogonal », « énnoncer ».

Signalons enfin la proportion trop élevée de copies nettement insuffisantes. « La majorité des compositions, dit un correcteur, s'éliminent d'elles-mêmes par un manque total de logique, d'esprit d'observation, de bon sens élémentaire. Dans une bonne moitié des copies, le problème n'est pour ainsi dire pas abordé; la faiblesse atteint même un tel degré qu'on peut se demander si certains élèves, réputés supérieurs à la moyenne, ont compris les propositions les plus simples de la géométrie. » — « Un grand nombre, constate un autre, ont cru pouvoir traiter un problème de géométrie plane, alors que l'énoncé ne permettait pas une telle interprétation. Cela s'expliquerait encore pour les derniers élèves d'une classe; mais c'est incompréhensible si l'on songe que ce sont les têtes de classes qui prennent part au concours. Faut-il en conclure que certains Professeurs envoient au Concours général des élèves que leur médiocrité devrait tenir à l'écart? »

L'Inspecteur général, Président du Jury de Correction,
A. TRESSE.