

**9. Rapport sur la composition de mathématiques
(Classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1927**

Une analyse sommaire de la position du problème (1) et des réponses aux différentes questions permettra de présenter des observations plus précises.

I. La première partie n'était qu'une entrée en matière. Etant donné un cercle Γ et une droite Δ_D du plan P de ce cercle, il s'agissait de trouver le lieu géométrique des points de contact D des sphères passant par Γ et des plans tangents à ces sphères, menés par Δ_D .

Il faut naturellement que Δ_D ne coupe pas Γ ; le lieu est un cercle (γ) , de centre δ , dont le plan p est perpendiculaire à Δ_D . La droite d'intersection de P et p passe par les centres des deux cercles Γ et (γ) et les diamètres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, portés par cette droite, se partagent harmoniquement.

On reconnaît dans les deux cercles Γ et (γ) , une configuration dont l'importance a été signalée à diverses reprises.

D et D' étant deux points quelconques de (γ) , A, B, C les sommets d'un triangle fixe inscrit dans Γ , on vérifie sans peine, au moyen d'une inversion de pôle D' , que les longueurs $D'A, D'B, D'C$ sont respectivement proportionnelles aux distances DA, DB, DC . D'autre part, une sphère quelconque, passant par Γ , coupe $D'A, D'B, D'C$ en des points A', B', C' ; on démontre que les côtés du triangle $A'B'C'$ sont respectivement proportionnels à $BC \times D'A, AC \times D'B, AB \times D'C$ et par suite aux produits constants $BC \times DA, AC \times DB, AB \times DC$, c'est-à-dire aa_1, bb_1, cc_1 , suivant les notations de l'énoncé. Le triangle $A'B'C'$ reste donc semblable à lui-même quand la sphère passant par Γ varie et que le point D' se déplace sur (γ) .

Ces remarques que suggère le rapprochement des divers paragraphes de l'énoncé simplifient la solution dans son ensemble.

II. A chaque point D , choisi sur (γ) , correspondent un tétraèdre $ABCD$ et une sphère Σ circonscrite à ce tétraèdre. Le cône circonscrit à Σ , le long de Γ , est coupé par le plan tangent en D , à Σ , suivant une conique (c) . D'après le théorème de Dandelin, D est un foyer de cette conique et la droite $D\delta$ en est l'axe focal. De plus Δ_D est la directrice relative au foyer D . Les génératrices du cône précité, situées dans le plan p , sont les tangentes aux points α, α' , à la section σ de Σ par ce plan. Ces génératrices rencontrent $D\delta$ en deux points s et s' qui sont

(1) Voir l'énoncé page 5 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1927*.

des sommets de (c) et tels en outre que $sz = sD$ et $s'z' = s'D$. (Supposons α à l'intérieur de (γ) et par suite α' à l'extérieur).

On demandait de déterminer les lieux géométriques respectifs de s et de s' , quand D décrit (γ) . Il résulte de ce qui précède que le lieu de s est le lieu des centres des cercles tangents à (γ) et passant par α . Ce lieu est donc une ellipse (E) dont (γ) est un cercle directeur, α étant le second foyer. De même, le lieu de s' est une hyperbole (H) dont (γ) est un cercle directeur, le second foyer étant en α' .

La façon dont ces lieux se présentent invite à utiliser leur génération tangentielle. La tangente à (E) en S est l'axe du segment $D\alpha$; de même, la tangente à (H) en S' est l'axe du segment $D\alpha'$. Ces deux axes se coupent au centre de σ , sur l'axe du segment $\alpha\alpha'$. Le déplacement simultané de s et s' apparaît alors nettement. Si D vient en un des points D_0 où la polaire de α' par rapport à (γ) rencontre ce cercle, l'axe de $D_0\alpha$ est la tangente en un sommet du petit axe de (E) et l'axe de $D_0\alpha'$ est une asymptote de (H) . Le petit axe de (E) la partage en deux moitiés; à chacune correspond une branche de (H) .

L'examen des excentricités montre qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

[Les deux coniques (E) et (H) sont homologues, le centre d'homologie étant le foyer commun δ ; l'axe d'homologie correspondant est l'axe du segment $\alpha\alpha'$, et les deux points α et α' sont des points homologues. On pourrait, en s'appuyant sur cette remarque, énoncer d'autres propriétés qui n'étaient pas visées, l'homologie n'étant pas au programme de la classe de Mathématiques.]

III. A la droite Δ_D , intersection du plan tangent à Σ , au point D , avec le plan ABC , correspondent d'autres droites analogues Δ_A , Δ_B , Δ_C . Deux quelconques de ces droites, Δ_A et Δ_B par exemple, ne se coupent pas en général; la première étant dans le plan BCD et la seconde dans le plan ACD , elles ne peuvent se couper que sur la droite CD , intersection de ces deux plans. Cela conduit à chercher les points M et N où les plans tangents à Σ en A et B rencontrent CD . Un calcul facile, utilisant la similitude des triangles MAC , MAD , montre que

$$\frac{MC}{MD} = \frac{AC^2}{AD^2}. \quad \text{De même} \quad \frac{NC}{ND} = \frac{BC^2}{BD^2}. \quad \text{Pour que les deux droites}$$

Δ_A et Δ_B se coupent, il faut et il suffit que l'on ait $AD \times BC = AC \times BD$, ou, en adoptant les notations de l'énoncé, $aa_1 = bb_1$ (1). La symétrie de cette relation montre que les deux couples de points A et B d'une part, C et D d'autre part, peuvent être échangés et, par suite, que si Δ_A et Δ_B se rencontrent, il en est de même de Δ_C et Δ_D .

On peut établir la même proposition sans passer par la relation (1). Le point M où Δ_A et Δ_B rencontrent CD est un point conjugué de A et de B par rapport à Σ , puisqu'il est dans les plans tangents à cette sphère respectivement en A et en B . Par suite CD et la droite polaire

de AB par rapport à Σ ont ce point M en commun. La droite polaire de CD et la droite AB sont donc dans le plan polaire de M par rapport à Σ et elles ont un point commun, c'est-à-dire que les plans tangents en C et D coupent AB au même point M', ou que Δ_C et Δ_D passent par M'. — M et M' sont des points conjugués par rapport à Σ .

[D'une façon générale, les quatre droites $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. Cette propriété n'était pas visée].

Une simple vérification montre que la relation $aa_1 = bb_1$ se conserve dans une inversion quelconque.

IV. Les pôles respectifs des faces du tétraèdre ABCD, par rapport à Σ , étant les points A_1, B_1, C_1, D_1 , les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont les droites polaires de $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ par rapport à cette même sphère. Si deux des premières droites se coupent, deux des dernières sont dans un même plan. Si les quatre premières droites concourent en un point, les quatre dernières sont dans un plan et réciproquement. On conclut de suite que les conditions $aa_1 = bb_1 = cc_1$ (2), sont nécessaires. Elles suffisent, car, en vertu de la relation $aa_1 = bb_1$, les droites Δ_A et Δ_B se coupent ; la relation $aa_1 = cc_1$ entraîne de même la rencontre des droites Δ_A et Δ_C . Mais bb_1 et cc_1 étant alors égaux, Δ_B et Δ_C se coupent et par suite aussi Δ_A et Δ_D . Ainsi Δ_A rencontre $\Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$. L'une quelconque des quatre droites rencontrant les trois autres, elles ne peuvent être que dans un même plan puisqu'elles ne sont pas concourantes.

Si l'on se reporte à la première partie, on voit que les côtés du triangle A'B'C', proportionnels à aa_1, bb_1, cc_1 , sont égaux et que ce triangle est équilatéral.

V. Le cercle Γ et la droite Δ_D étant donnés, ainsi que le point D, sur (γ), et le tétraèdre ABCD étant de l'espèce caractérisée par les relations (2) et visée au § IV de l'énoncé, il y a une infinité simple de triangles ABC, inscrits dans Γ . Un plan fixe Π , parallèle au plan défini par D et Δ_D , coupe DA, DB, DC, respectivement en A', B', C' ; le cercle Γ' circonscrit au triangle A'B'C', et le cercle Γ sont sur un même sphère. Le triangle A'B'C' est donc équilatéral et ses côtés sont tangents à un cercle Γ_1 qui a même centre que Γ et un rayon moitié. La perspective de Γ_1 sur le plan P, du point de vue D, est une ellipse (ε) à laquelle sont tangents les côtés du triangle ABC.

Soit U un point de Δ_D . Cherchons les tangentes menées de U à Γ et à (ε). Pour cela, menons par D la droite DU et, par cette droite, les plans tangents aux deux cônes qui ont D pour sommet, Γ et Γ_1 comme bases respectives. Comme DU est parallèle au plan Π , les points de contact de ces plans tangents avec Γ et Γ_1 sont sur une droite qui passe par le centre O_1 commun à ces deux cercles. La perspective de cette droite sur le plan P est la corde des contacts des tangentes menées de U à Γ et (ε) ; tous les points de Δ_D ont donc même polaire par rapport à Γ et à (ε).

L'ensemble des triangles ABC n'est d'ailleurs pas modifié si l'on substitue à D un point quelconque du cercle (γ) , de sorte que la conique (ϵ) est complètement définie quand le cercle Γ et la droite Δ_D sont donnés.

Si l'on se reporte à la première partie, on peut esquisser une généralisation. Supposons le tétraèdre ABCD quelconque, le cercle Γ , la droite Δ_D et le point D étant donnés, ce dernier sur (γ) . Il y a une simple infinité de triangles ABC tels que aa_1, bb_1, cc_1 soient proportionnels à des nombres donnés u, v, w . Un plan Π fixe, parallèle au plan défini par D et Δ_D , coupe DA, DB, DC, respectivement en A', B', C' , et les côtés du triangle $A'B'C'$ sont proportionnels à u, v, w . Il y a une infinité simple de triangles $A'B'C'$, semblables à l'un d'eux, et inscrits dans le cercle Γ' ; une rotation quelconque autour du centre O_1 de Γ' donne un nouveau triangle $A'B'C'$. Ainsi, les côtés de ce triangle enveloppent des cercles de centre O_1 , etc.

VI. Le cercle Γ et la droite Δ_D étant donnés, il est naturel de chercher les éléments de l'ellipse (ϵ) . Posons $\delta x = d, \delta x' = d'$. Lorsque le plan Π se déplace parallèlement à lui-même, le point D étant fixé, le centre O_1 des cercles Γ, Γ_1 décrit la droite conjuguée harmonique de $D\delta$ par rapport à Dx et Dx' . Cette droite perce le plan P en un point O conjugué harmonique de δ par rapport à x et x' . Le plan Π mené par O rencontre Dx et Dx' respectivement en I et I' . Soient J et J' les milieux de OI et de OI' . Les projections coniques j et j' de ces points sur le plan P , du point de vue D, sont deux sommets de (ϵ) ; ce sont les conjugués harmoniques de δ par rapport à O et x d'une part, O et x' d'autre part. Des équations du premier degré très simples, définissent donc les abscisses des points o, j, j' par rapport à δ et par suite les abscisses de j et j' par rapport à O . La longueur de l'axe jj'' en résulte; elle a pour expression $8dd' \frac{d' - d}{(3d + d')(3d' + d)}$.

On calcule aisément l'ordonnée OK du point de l'ellipse (ϵ) , qui se projette orthogonalement en O , sur l'axe jj'' . Il suffit de remarquer que OK est égal à la moitié de OI , de sorte que

$$OK^2 = \frac{1}{4} \cdot OI^2 = \frac{1}{4} \cdot Ox \cdot Ox'.$$

Le rapport $\frac{oj \cdot oj''}{OK^2}$ vaut $16 \frac{dd'}{(3d + d')(3d' + d)}$; il est inférieur à 1, ce qui montre que le petit axe de l'ellipse (ϵ) est jj'' ; ce même rapport étant égal au carré du rapport des deux axes, la longueur du grand axe s'en déduit de suite ainsi que l'excentricité. Les carrés de ces deux éléments sont des fonctions rationnelles de d et d' ; ils s'annulent en même temps que $d' - d$.

Telle est, dans ses grandes lignes, la solution du problème proposé. Les deux premières parties semblaient devoir être traitées, — la

seconde plus ou moins complètement — par tous les concurrents ; il n'en a rien été : 12 d'entre eux n'ont pas abordé la première et 100 ont reculé devant la seconde. Par conséquent, plus d'un tiers des 276 copies remises émanent de jeunes gens qui n'auraient pas dû participer à l'épreuve.

Pour étudier la première question, 4 candidats ont fait appel à la géométrie analytique et l'un d'eux a trouvé une hyperbole équilatère !

D'autres ont utilisé l'inversion, ce qui était superflu.

L'emploi d'un angle inscrit, dont la mesure est $\frac{\pi}{4}$, laisse rêveur.

La phrase suivante « le tétraèdre se réduit à un quadrilatère » produit une impression analogue.

Un candidat a trouvé une droite. Cinq se sont tenus à une sphère. Un sixième plus avisé dit que « le lieu est un cercle parce qu'il ne peut être une sphère. »

Un humoriste écrit : « On conçoit difficilement un plan tangent à une sphère qui serait sécant par rapport à un de ses petits cercles. »

La phrase « un faisceau de sphères de base le cercle Γ », trouvé dans une copie primée, est un bien mauvais exemple de style télégraphique.

La signification de l'expression « réseau de sphères » échappe à plusieurs.

La formule $r = \frac{R^2 d + R \sqrt{d^2 - \rho^2} (d^2 + R^2 - \rho^2)}{d^2 + R^2 - \rho^2}$, tirée de l'une

des copies, indique un mépris profond de l'homogénéité.

Enfin, les expressions « lieu probable », « lieu rigoureux », employées par un candidat qui a d'ailleurs limité le lieu définitif sans raison valable, indiquent nettement la marche suivie encore par un trop grand nombre : ou s'évertue à démontrer un fait pressenti, au lieu d'observer et de conclure. C'est tout le contraire de la méthode recommandée dans les instructions. Tant que la géométrie sera présentée de cette façon, sa contribution à la culture générale restera médiocre et elle ne servira guère qu'à former des spécialistes.

Notons, dans l'ensemble, un louable souci des réciproques et une certaine connaissance des anneaux de cercles.

L'examen de la seconde partie ne prête pas à des remarques aussi nombreuses, beaucoup de non-valeurs s'étant déjà éliminées.

Les deux coniques ont été vues généralement ; leur homologie est même signalée, dans une copie non récompensée d'ailleurs.

La correspondance des points à l'infini, sur l'hyperbole, et des extrémités du petit axe, sur l'ellipse, est mentionnée dans dix copies — dont une seule récompensée —, sans raisons déterminantes le plus souvent. Personne n'a vraiment utilisé ce fait que les foyers non communs sont deux points inverses par rapport au cercle directeur commun ; l'inventaire des données et des résultats, et la volonté bien arrêtée d'en tirer parti, sont encore trop rares.

Les lieux sont limités parfois à tort.

Un candidat indique deux ellipses, un autre deux hyperboles !

La géométrie analytique révèle à l'un d'eux « une hyperbole équilatère dont l'excentricité est égale à $1/2$. » Ceux — ils sont deux — qui attribuent même excentricité à l'ellipse et à l'hyperbole ne manquent pas moins d'à-propos, ainsi que celui qui voit un sommet commun aux deux coniques.

Il est encore trop souvent question du « grand axe » d'une hyperbole.

La recherche de la liaison des excentricités a été l'occasion de la faute la plus grave et la plus fréquente ; ceux qui l'ont commise n'ont pas compris l'énoncé, puisqu'ils ont donné une relation contenant non seulement les excentricités, mais aussi des longueurs de la figure. Beaucoup ont formé le rapport des excentricités, l'un d'eux la différence ; pourquoi pas la somme ?

On trouve dans une copie : « $ee' = \frac{R^2}{4R^2} = \frac{1}{3R^2}$ ». Cela fait songer aux balbutiements des débutants en algèbre.

L'affirmation relative aux faisceaux homographiques, engendrés par les rayons vecteurs qui vont d'un point d'une conique à ses foyers, rentre dans une catégorie bien connue ; elle montre combien est risqué l'emploi de l'homographie à ce niveau.

Enfin, l'éloquence « du théorème de Dandelin *qui dit....* » est invoquée sous une forme dont les auteurs ne portent pas sans doute toute la responsabilité.

Des 105 concurrents qui se sont attaqués à la troisième partie, un assez grand nombre en ont donné une solution juste, faisant appel, le plus souvent, aux propriétés des pôles et des polaires : il semble que cette notion ait pénétré.

Ceux qui se sont inspirés du texte de la quatrième question pour établir la relation $aa_1 = bb_1$, n'ont pas vu que la construction de cette formule ne distingue pas l'arête AB de l'arête CD ; ils se sont bornés à une vérification.

Les raisons données manquent parfois de précision, mais peu d'erreurs graves ont été commises. Un candidat affirme pourtant à tort que AB et CD sont orthogonales. Un autre aventure l'expression « concurrence à l'infini » pour caractériser des droites parallèles.

La quatrième partie a donné lieu à 67 essais.

La liaison des deux faits suivants : 1° les quatre droites AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , sont concourantes ; 2° les quatre droites Δ_A , Δ_B , Δ_C , Δ_D , sont dans un même plan, a été vue nettement par quelques-uns et utilisée pour établir les formules $aa_1 = bb_1 = cc_1$. Mais, s'il est bien démontré que ces conditions sont nécessaires, il ne résulte guère des raisonnements faits qu'elles soient suffisantes. Un doute subsiste à ce sujet dans beaucoup de copies et celle qui a été jugée la meilleure n'est pas inattaquable sur ce point.

Ces relations caractéristiques une fois établies, la démonstration relative au triangle équilatéral, au moyen d'une inversion, devenait

facile. Certains candidats se trouvaient là sur un terrain déjà exploré, à tel point que quelques-uns sont partis du triangle équilatéral pour rétablir les relations qu'ils n'avaient pas su trouver directement.

Quelques-autres, assez mal inspirés, ont voulu rattacher ces tétraèdres particuliers à des souvenirs de classe. Ceux qui ont cru y voir des tétraèdres réguliers étaient loin de compte, puisque ces derniers tétraèdres sont soumis à cinq conditions. Ceux, en très petit nombre, qui les ont identifiés à des tétraèdres dont les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux, sont à l'abri de ce reproche, puisque les deux relations :

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$$

caractérisent cette dernière catégorie. Mais ils ont joué, comme les premiers, sur un coup de dés et l'un d'eux, notamment, a édifié toute une théorie en étayant ses assertions de faits imaginés pour les besoins de sa cause.

39 candidats se sont essayés à la cinquième partie. Deux seulement en ont donné une solution irréprochable ; encore l'une des réponses est-elle incomplète. Les copies correspondantes ont été classées dans les premiers rangs.

Enfin, on ne trouve des traces de la sixième partie que dans onze copies ; ce ne sont d'ailleurs que des essais informes pour la plupart. Le candidat qui a obtenu le premier prix serait arrivé au résultat par des voies assez rapides s'il n'avait commis, dès le début, des fautes d'homogénéité dont la grossièreté s'explique difficilement.

Dans l'ensemble, la tenue matérielle des copies est bonne ; et, malgré les fautes signalées plus haut, la rédaction en est assez soignée. Sans doute, on retrouve des fautes d'orthographe qui sont de vieilles connaissances : « quelleconque... ellypse... conniques... asymptotes... concourrantes » ; mais le nombre en est assez réduit en somme.

Quelques chiffres permettront de comparer les meilleures copies à celles des années précédentes. Les notes attribuées aux copies primées sont respectivement 15,6, 12,6 et 11,4. Celles des dix accessits s'échelonnent de 11,1 à 8,9. Un assez grand nombre de notes variant de 8 à 6 témoignent encore de résultats honorables. En somme, ce concours n'est pas inférieur aux meilleurs de ceux qui l'ont précédé.

Le premier prix se détache nettement des suivants. L'élève qui en a été jugé digne voit vite et juste en général. La géométrie l'intéresse plus que le calcul. Il prend plaisir au jeu des idées et attache peu d'importance à la mise en forme : sa copie a l'aspect d'un brouillon. Certaines parties de sa rédaction sont d'une sobriété et d'une concision qui pourraient faire croire à de la sécheresse, mais qui tiennent à la rapidité d'une synthèse inconsciente. Il est clair sans effort, obscur sans s'en douter. Il ne paraît pas avoir subi l'empreinte d'une formation et il se présente avec ses qualités naturelles et son défaut d'expérience. Il y a en lui l'étoffe d'un mathématicien. Les promesses d'avenir qu'il a données en cette circonstance se réaliseront tout naturellement quand il sera soumis à la discipline d'une méthode.

*L'Inspecteur général,
Président du Jury de Correction,
E. BLUTEL.*