12. Rapport sur le Concours, en 1926 de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)

83 candidats se sont présentés aux épreuves écrites; 1 ancien admissible, Alsacien-Lorrain, conservait le bénéfice de l'admissibilité.

La répartition des 84 candidats, en quatre catégories, montre :

36 chargés de cours ou délégués, professeurs de collège, d'école normale, d'école primaire supérieure, ou en congé ;

12 maîtres répétiteurs ou maîtres d'internat ;

14 élèves ou anciens élèves de l'Ecole normale supérieure ;

22 boursiers d'agrégation ou étudiants libres.

46 se présentaient pour la première fois.

Si l'on s'en tient au nombre et à l'origine des candidats, le recrutement du concours s'effectue de façon à peu près normale.

Epreuves écrites (2).

Le nombre des copies remises a été de 82 en mathématiques élémentaires, 79 en mathématiques spéciales, autant en analyse, 78 en mécanique. Rarement les candidats ont montré une pareille continuité dans l'effort ; on ne saurait trop se féliciter de cet état d'esprit.

Les rapports particuliers des correcteurs principaux donneront une idée nette de la valeur des épreuves écrites et les desiderata formulés montreront les progrès à accomplir.

Mathématiques élémentaires (M. Marijon). — « Le choix du sujet marquait une innovation : on proposait deux problèmes distincts, l'un d'arithmétique, l'autre de géométrie.

(1) Le jury était composé de MM. Blutel, inspecteur général, président ; Marijon, inspecteur général, vice-président ; Chatelet, recteur de l'Université de Lille ; Fatou, astronome-adjoint à l'Observatoire ; Chenevier, professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis.

(2) Voir les énoncés pages 9 et suivantes des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1926*.

L'arithmétique — on s'y attendait un peu — a effrayé un certain nombre de candidats. Vingt copies restent muettes sur le premier problème. Seize autres se bornent à quelques vagues discours, d'où ne ressort aucun résultat précis. Le pire était à craindre; et le Jury constate, en somme, avec satisfaction, que 18 notes atteignent ou dépassent, pour ce problème, la moyenne 10.

La première partie était une conséquence immédiate de la relation

$$N' = 10N - a\,(10^n - 1)$$

entre le nombre N, du cycle, commençant pas le chiffre a, et le nombre suivant N', commençant par le chiffre de N qui suit a.

Dans l'étude de la réciproque, on a trop souvent affirmé que « si un nombre divise un produit de deux facteurs sans diviser l'un d'eux, il divise l'autre ». Un certain nombre de nos concurrents croient que deux nombres dont l'un n'est pas multiple de l'autre sont premiers entre eux.

31 notes dépassent 10.

La détermination des cycles d'ordre 3, dont les nombres sont en progression arithmétique, ne présentait aucune difficulté. On pouvait, par exemple, former la somme des trois nombres, et constater que le nombre moyen est multiple de 37. En appliquant le résultat de la première partie, et en observant que la raison, divisible par 37, et aussi par 9 (comme différence de deux nombres formés des mêmes chiffres), ne peut être que 333, on obtenait sans peine les cycles 037 et 074, et ceux qui s'en déduisent par addition de 111 et 222.

On pouvait aussi — et cette méthode a tenté la majorité des concurrents — écrire que le nombre moyen est la moitié de la somme des deux autres. Si a, b, c sont, dans leur ordre, les chiffres de ce nombre moyen, on obtient la relation

$$7a = 3b + 4c\,, \qquad \text{ou} \qquad 4\,(a - c) = 3\,(b - a)$$

qui se traduit par les égalités $a - c = 3m$, $b - a = 4m$, les seules valeurs possibles pour m étant $+1$ et -1.

Plusieurs copies développent cette idée très simple en deux ou trois pages; mais cinq seulement donnent explicitement les cycles demandés.

Cette deuxième partie est, en définitive, la mieux réussie; 38 notes atteignent ou dépassent 10.

La troisième question était moins immédiate. Une seule copie en donne une solution acceptable, sans distinguer, toutefois, entre les cycles 031746, 142857, 253968, qui répondent effectivement aux conditions de l'énoncé, et d'autres dont les nombres sont six termes, non consécutifs, d'une progression géométrique, des multiples de 111 111 s'intercalant entre eux. Pour éviter l'introduction de ces nombres, la considération de la somme des six nombres du cycle présentait un intérêt évident.

La note la plus élevée relative à cette dernière partie est 16; viennent ensuite trois notes 10.

Un candidat seulement a soupçonné que le problème pouvait avoir quelque rapport avec les nombres décimaux périodiques.

Pour l'ensemble de cette épreuve d'arithmétique, les meilleures copies valent 19, 17, 15, 15, 13. Moyenne générale 5,1.

La réponse à chacune des questions posées dans le problème de géométrie plane pouvait être donnée en quelques lignes.

Voici, à titre d'exemple, une solution de la première partie, la plus malmenée de toutes.

La rotation d'angle α qui amène $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{O_\alpha A_\alpha}$ peut être envisagée comme le produit de deux symétries : l'une par rapport à ωA, l'autre par rapport à ωx, perpendiculaire à AA_α.

La première de ces symétries transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{O_1A}$. Les vecteurs $\overrightarrow{O_1A}$ et $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$, symétriques de $\overrightarrow{O_\alpha A_\alpha}$ par rapport aux perpendiculaires menées de ω et O à AA_α sont équipollents. $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$ se déplace donc en restant équipollent au vecteur fixe $\overrightarrow{O_1A}$.

En général, on commence par considérer des valeurs algébriques d'angles, puis on s'égare dans l'application de théorèmes sur les valeurs absolues : Somme des angles d'un triangle, somme des angles d'un quadrilatère,..... en sorte que les solutions obtenues s'appliquent seulement à un cas de figure.

Plus de la moitié des concurrents se croient encore obligés de mesurer des angles inscrits pour constater qu'ils sont égaux. Les trois quarts trouvent des lieux qui sont des arcs, ou des segments, automatiquement qualifiés de « capables ». Il ne semble pas que l'attention soit suffisamment attirée, dans notre enseignement, sur la vraie nature du lieu du sommet d'un angle invariable dont les côtés passent par deux points fixes.

Tel enfin qui a trouvé comme lieu « un segment capable » ou le « système des deux segments capables » affirme quelques lignes plus loin « que le lieu est un cercle » sans se soucier de la différence entre ces deux affirmations.

Beaucoup de rédactions vagues, hésitantes, barbouillées, laissent au Jury une pénible impression d'incertitude. Les solutions vraiment nettes sont rares. Le sujet était pourtant de ceux qu'un candidat à l'agrégation ne doit pas avoir de peine à dominer.

39 solutions ont été cotées 10, ou au-dessus de 10 ; parmi elles, trois 18, cinq 17, quatre 16, deux 15. Moyenne générale : 9,1.

Douze des vingt candidats qui n'ont pas fait d'arithmétique ont moins de 10 en géométrie.

Compte tenu des deux problèmes, les notes attribuées à l'épreuve de mathématiques élémentaires s'étagent de 18,5 à 2. Les meilleures sont 18,5, 17, 15,5, 14. Dix-neuf atteignent ou dépassent 10. Douze vont de 8 à 10, trente de 5 à 8, vingt et une sont inférieures à 5. Moyenne générale : 7,1. »

Mathématiques spéciales (M. CHENEVIER). — « Sur 79 copies de mathématiques spéciales, 6 seulement ont des notes supérieures à 10; 11 sont cotées de 8 à 10; 40 atteignent ou dépassent 5 sans atteindre 8, et 22 ont des notes inférieures à 5. La moyenne de l'épreuve est 5,95. C'est dire que l'ensemble est très faible.

Le problème proposé consistait à étudier une famille de cubiques unicursales planes qui admettaient les droites isotropes de l'origine comme tangentes d'inflexion. Ce fait apparaissait *a priori*, sur les équations paramétriques données, si l'on formait l'expression $x + iy$. Il en résultait que ces cubiques avaient toujours un point double à branches réelles, un autre point d'inflexion réel et que leurs transformées par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O étaient des cardioïdes. Les deux dernières parties conduisaient par cette transformation à des propriétés simples de cette courbe.

La première partie comportait la recherche et la construction de deux lieux géométriques. Un trop grand nombre de candidats reculent devant les constructions effectives ou se contentent de schémas beaucoup trop vagues. D'autres construisent des cubiques ou des quartiques dont le nombre des points communs avec une droite est hypertrophié. Un candidat caractérise un point d'inflexion d'une courbe unicursale par le fait que x'' est nul, y'' ne l'étant pas. De pareilles erreurs étonnent dans des copies d'agrégation. Une copie contient une discussion pour savoir si le point double d'une cubique unicursale réelle peut être imaginaire. Enfin certains candidats abusent vraiment de l'affirmation qu'une courbe est bien facile à construire, alors que cette facilité ne les a même pas incités à amorcer la construction. Néanmoins cette première partie est celle dont les notes ont été les meilleures dans l'ensemble. La moyenne est 10,03. Il y a cinq copies cotées de 15 à 18, quarante-trois cotées de 10 à 14, trente et une au-dessous de 10.

La deuxième partie comportait l'étude et la construction de trois enveloppes de droites et l'étude de trois droites qui formaient un faisceau régulier. Ce dernier fait, évident par simple lecture si l'on reconnaît au passage la formule qui donne $\operatorname{tg} 3a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$ n'a été vu que par neuf candidats et par certains au prix d'efforts soutenus. Un candidat a terminé une étude confuse par cette conclusion nette : « Les droites sont relativement semblablement placées. » On trouve encore dans cette partie du problème de graves erreurs. Un candidat écrit qu'une tangente d'inflexion à une cubique porte encore deux inflexions. Un autre propose d'éliminer trois paramètres dans une seule équation. Un troisième applique la règle de L'HOPITAL pour trouver la limite du quotient de deux polynômes qui ont un zéro commun. La moyenne des notes données pour cette partie est 9,45. Signalons dix copies cotées de 15 à 18, trente-cinq cotées de 10 à 14, trente-quatre au-dessous de 10, dont trois zéros.

Dans la troisième partie on demandait pour quelles valeurs du paramètre la cubique possédait une boucle fermée. 10 candidats seulement ont répondu exactement. D'autres ont affirmé qu'il était nécessaire et suffisant que le point double fût à branches réelles, ou qu'il existât une tangente parallèle à l'un des axes. Un candidat a écrit qu'il suffirait « que la branche ne traversât pas l'asymptote ».

La recherche de la différentielle de l'aire tenait en quatre lignes si l'on observait que $x\,dy - y\,dx$ est à un facteur près la différentielle de $\frac{y}{x}$ et que la considération de $\frac{x+iy}{x-iy}$ conduisait aussitôt à ce calcul. De même l'expression $dx + i\,dy$ donnait aussitôt ds sous une forme très simple. 4 candidats ont trouvé le résultat pour l'aire, un seul pour l'arc. Plusieurs candidats ont chassé sans crainte le dénominateur $3\alpha^2 - 1$ d'une inégalité. La moyenne des notes de cette partie est 1,94. Signalons quatre copies cotées entre 10 et 13, trente-cinq de 0,5 à 9,5 et quarante zéros.

La quatrième partie comportait l'étude de l'enveloppe d'une corde de la cubique, dont les extrémités se correspondaient involutivement. L'équation tangentielle de Γ_α était immédiate et tout le reste s'en déduisait. Des considérations géométriques permettaient d'apercevoir le foyer O de ces coniques et la directrice associée Δ'_α. Un seul candidat a traité la question en géométrie ponctuelle et a eu pour cette partie la note 18. Il est à regretter que les autres parties de sa composition aient été moins bonnes. Une autre copie obtient 14 et deux autres 10. Ensuite viennent deux 6, puis 38 copies cotées entre 0,5 et 5. Il y a enfin 35 zéros. Citons pour la beauté du fait une copie dans laquelle figure, sur 6 lignes, une équation qui mesure un mètre de longueur. Citons aussi une erreur grave répétée deux fois dans une même copie : un polynôme du 4e degré admet le zéro double $t = 3\alpha$. Son quotient par $(t - 3\alpha)^2$ est celui de sa dérivée par $t - 3\alpha$.

La cinquième partie du problème n'a été abordée que par 11 candidats. Les coniques γ_M, tangentes aux isotropes de l'origine et à Δ_α étaient en outre tangentes à la droite Δ'_α. Aucun candidat n'a vu ce résultat et les notes des 11 copies vont de 1 à 4. Un candidat a cherché l'équation tangentielle d'une conique dégénérée en deux droites.

D'une manière générale, les candidats ont abordé successivement cinq problèmes sans aucune idée d'ensemble, sans s'être demandé quels pouvaient être les liens des diverses parties et sans voir les sécurités que conférait une vision un peu générale au point de vue du calcul. Certaines copies ont une forme lamentable. Il serait à désirer que de futurs professeurs, dont le devoir est d'exiger de leurs élèves des copies et non des brouillons, prêchassent d'exemple. Le correcteur est heureux de signaler à cet égard une copie de forme remarquable et dont la note aurait été bien meilleure si son auteur avait pris la peine de construire les courbes qui étaient demandées. »

Calcul différentiel et intégral (M. Fatou). — « Le problème de calcul différentiel et intégral, proposé aux candidats, était relatif à quelques propriétés des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre, envisagées dans le domaine réel, lorsqu'on astreint les coefficients de l'équation à certaines conditions d'un caractère assez général. Les diverses questions posées étaient en relation avec d'importants principes qui interviennent dans les applications de cette branche de l'analyse à la physique mathématique et à la mécanique céleste ; mais, pour traiter le problème tel qu'il était formulé, les candidats devaient seulement connaître quelques théorèmes généraux, démontrés dans tous les cours de licence, et être familiarisés avec le mécanisme du calcul différentiel. On était donc fondé à espérer que quelques candidats ayant suivi avec fruit l'enseignement de ces matières dans une Faculté et fait des exercices s'y rapportant, parviendraient à traiter d'une manière satisfaisante sinon la totalité du problème, du moins la plus grande partie des questions proposées. Cependant un seul candidat a répondu à cet espoir, en traitant le problème d'une manière assez incomplète, il est vrai, mais satisfaisante dans l'ensemble et montrant, en même temps qu'une connaissance assez approfondie des principes, certaines facultés d'intuition ; seul ce candidat a obtenu une note supérieure à la moyenne.

Quelques autres copies (sept ou huit environ), notablement inférieures à la précédente, ont montré cependant que leurs auteurs possédaient certaines connaissances dans ce domaine et une habitude suffisante du calcul différentiel ; ces copies, quoique très incomplètes, ont obtenu des notes se rapprochant de la moyenne ; les autres n'ont pu avoir que des notes médiocres ou mauvaises.

Dans l'ensemble, cette épreuve a montré que les candidats possédant la culture mathématique élevée que l'on est en droit d'exiger d'un agrégé sont trop peu nombreux, et il est à souhaiter que, dans la préparation de cet examen, les matières d'enseignement supérieur soient moins sacrifiées aux questions élémentaires et aux exercices purement pédagogiques. »

Le rapporteur s'associe pleinement aux constatations du correcteur principal de la question d'analyse et aux regrets qu'il exprime. On ne saurait trop conseiller aux candidats à l'agrégation de reprendre l'étude de leur cours de licence, de réfléchir longuement aux difficultés rencontrées, de faire de nombreux exercices. Ceux qui consentiront à faire cet effort seront beaucoup mieux armés que leurs concurrents, pour l'admissibilité tout au moins, et, comme leur culture générale en bénéficiera largement, ils auront acquis une sûreté de jugement qui aidera beaucoup au succès final.

Mécanique (M. Chatelet). — « 77 copies ont été notées, mais cinq d'entre elles ne renfermaient que des généralités sans rapport ave les questions posées ; on n'a pu leur attribuer que la note zéro.

Le texte comportait quatre parties qui pouvaient se traiter indépendamment. La plupart des candidats ont consacré presque tous leurs soins à la première partie et ont plus ou moins négligé les autres.

Les deux premières parties 1_a et 1_b étaient des cas particuliers du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, définis par des conditions initiales ; on demandait en outre d'obtenir des approximations de mouvements par le calcul des premiers termes de développements en série. De nombreux candidats connaissaient évidemment la question théorique ; beaucoup se sont bornés à l'exposer plus ou moins correctement, ont fait une discussion générale qui n'était pas demandée, mais par contre, n'ont pas toujours vu nettement les circonstances particulières des mouvements précis qu'on leur demandait d'étudier. Les approximations qui constituaient les questions à proprement parler originales, n'ont été obtenues que par peu d'entre eux. Pour la première partie 1_a, cinq candidats ont obtenu des résultats satisfaisants ; 15 autres en ont abordé la recherche avec des procédés plus ou moins hasardeux et sans grand succès. Pour la seconde partie 1_b, sur une dizaine de candidats qui ont recherché des approximations, 4 ou 5 sont parvenus à des résultats exacts plus ou moins complets ; deux où trois ont vu nettement ce que devenait le mouvement lorsqu'on fait abstraction de la pesanteur.

La troisième partie consistait en la recherche d'un mouvement stationnaire, ce qui pouvait être fait, soit à partir des équations obtenues pour la première ou deuxième partie, soit à partir des distributions presque évidentes des forces de pesanteur, de réaction et d'inertie appliquées au corps. Cette seconde façon de faire extrêmement rapide était suggérée par l'une des questions posées ; aucun candidat ne l'a employée. Quatre ou cinq seulement ont obtenu des conclusions correctes ; un seul a abordé avec succès la question des perturbations par une force ou une percussion.

La quatrième partie consistait aussi dans la recherche d'un mouvement stationnaire dans le cas de liaisons plus complexes et cette fois encore une étude directe des forces en fournissait une solution brève et évidente. Une quinzaine de candidats ont indiqué des procédés corrects pour la formation des équations du mouvement, quatre ont trouvé des conditions justes, un seulement qui n'avait pas recherché les équations a essayé avec un certain succès d'étudier *a priori* la distribution des forces.

Il importe d'ajouter que, dans l'appréciation des copies, on a cherché moins à dénombrer les résultats obtenus que l'exactitude et la précision des méthodes, le souci de l'interprétation géométrique ou mécanique des calculs, la clarté et la netteté de l'exposition. Cette dernière qualité est toujours assez rare. »

Une impression assez terne, que ne suffit pas à expliquer la difficulté ou la longueur de certaines questions, se dégage de cet ensemble de constatations. L'examen des moyennes obtenues à l'écrit vient la confirmer :

Huit candidats seulement ont une moyenne égale ou supérieure à 10, et qui ne dépasse pas 13,5 ; pour les quatorze suivants, elle est comprise entre 7 et 9,1 ; treize autres vont de 6,4 à 7 et la moyenne générale est de 5,72. Le 35ᵉ et dernier admissible a obtenu 6,4.

Il est manifeste que les connaissances scientifiques de la majorité des candidats ne reposent pas sur des bases suffisamment solides et qu'elles ne sont pas assez digérées pour en permettre l'application rapide à des cas concrets. Si l'oral n'était venu au secours de beaucoup des admissibles, le jury aurait eu beaucoup de peine à atteindre la limite de 18, fixée pour le nombre des candidats admis dans les conditions normales.

Epreuves orales et pratiques.

Sur les 36 admissibles, ancien et nouveaux, huit appartiennent à la première catégorie, quatre à la seconde, douze à la troisième et autant à la quatrième. Vingt-quatre se présentaient pour la première fois.

A l'oral, les notes d'élémentaires s'échelonnent de la façon suivante : six de 15 à 18, vingt-huit de 10 à 14, une note 8 et une note 4 ; la moyenne 12,33 est satisfaisante. En spéciales, les candidats se différencient plus nettement : neuf ont de 15 à 18, quatorze de 10 à 14 et treize de 7 à 9, soit une moyenne de 11,7.

Huit candidats ont une moyenne générale de leçons égale ou supérieure à 14 et font augurer de bons professeurs. Celui qui s'est classé premier a obtenu 18 et 18 ; il a montré un ensemble de qualités qui l'égalent aux meilleurs.

En élémentaires, certaines leçons ont péché surtout par l'adaptation au milieu, les candidats visant presque toujours trop haut. Cette faute de jugement est sans excuse, de la part de ceux qui ont déjà enseigné.

La notion de points conjugués par rapport à un cercle n'est pas mise en valeur et l'interprétation géométrique n'en est pas signalée, quand la droite qui les porte ne rencontre pas le cercle, de sorte que la définition de la polaire d'un point extérieur au cercle contient une part d'arbitraire et ne prépare pas bien les applications.

Des glissements imprévus et inutiles sont trop souvent employés pour la comparaison des volumes de pyramides qui ont des sommets communs ; substituer un acte que rien n'impose à une période d'observation que tout indique est de mauvaise formation logique : on s'étonne de certaines persistances qui sont la terreur des élèves.

Pourquoi ne pas rattacher le nombre des chiffres d'un quotient à l'opération qui le fournit ?

L'emploi des deux expressions « nombre décimal » et « fraction décimale » avec la même signification est une source de confusions. Si l'on regarde une fraction décimale comme une fraction ordinaire dont le dénominateur est une puissance de 10, ce qui est naturel, la question des opérations sur les fractions décimales se trouve traitée, du moment qu'elle l'a été pour les fractions ordinaires, et il est à peu près sans intérêt d'énoncer les règles relatives aux résultats ; quand on a constaté qu'une somme, une différence, un produit de fractions décimales sont des fractions décimales et que le quotient de deux fractions décimales est en général une fraction ordinaire, tout est dit ou à peu près. Au contraire, la leçon sur les nombres décimaux subsiste et c'est celle-là qui est demandée.

La classification des valeurs remarquables du paramètre, dans la discussion d'une équation du second degré, ne tient pas assez compte de l'origine de ces valeurs.

On abuse du mot « pair » pour qualifier le cœfficient $2b$ du trinôme $ax^2 + 2bx + c$, alors que $2b$ peut être un nombre incommensurable.

La variation de la fraction rationnelle du second degré, sur des exemples numériques, est singulièrement facilitée par une étude préliminaire et rapide de quelques propriétés générales, qui n'exige aucun calcul : il semble que le mot « numérique » paralyse tous ceux qui traitent cette question.

En spéciales, beaucoup de candidats mis en présence d'un sujet susceptible de longs développements ne peuvent se résigner aux sacrifices nécessaires et se limiter aux faits essentiels; ils énumèrent plutôt qu'ils ne démontrent. Les leçons sur le rapport anharmonique, l'homographie et l'involution, les propriétés succinctes des coniques d'un faisceau linéaire ponctuel, n'ont pas échappé à cette observation.

Un sujet aussi classique que la variation des fonctions ne devrait plus paraître ignoré d'aucun candidat.

L'étude des conditions d'existence de racines multiples, dans tous les cas possibles, pour les équations du troisième et du quatrième degré, est encore médiocrement faite.

On continue à accorder trop d'importance au calcul numérique des déterminants alors qu'ils valent surtout par leur symbolisme.

L'épreuve de calcul numérique, dont le sujet était un peu nouveau, n'a pas trop effrayé les candidats admissibles : treize ont des notes variant de 10 à 17 et la moyenne générale est de 8. Les meilleures notes ne vont pas toujours à ceux qui ont montré les connaissances théoriques les plus sûres; sur ce terrain, les spéculations les plus variées ne peuvent remplacer un acte. Beaucoup de copies laissent fort à désirer dans la forme.

L'épure fournit quinze notes allant de 10 à 18; la moyenne est 8,66. Les anomalies sont moins fréquentes que pour le calcul.

On ne peut affirmer que les épreuves pratiques aient empêché un candidat d'être reçu; mais elles ont assuré le succès de certains et contribué par conséquent à l'échec de quelques autres.

Dans l'ensemble, les épreuves ont été suffisantes pour que la liste normale d'admission comprît 18 noms. Parmi les reçus figurent 9 élèves de l'Ecole normale supérieure, 1 ancien élève, 1 chef de travaux pratiques d'une Faculté, 7 boursiers d'agrégation ou étudiants. En outre deux Alsaciens-Lorrains ont été admis, l'un hors rang, l'autre au titre d'ancien admissible. Tous peuvent figurer honorablement dans les cadres de l'enseignement secondaire public.

L'Inspecteur général, Président du Jury,
E. Blutel