Sur les champs de moments

Je vais à mon tour donner une démonstration géométrique du théorème suivant (1) :

Si un champ de vecteurs est tel que, quels que soient les points M et M', les vecteurs du champ en ces deux points aient des projections orthogonales équipollentes sur la droite MM', c'est le champ des moments d'un système de vecteurs.

Nous examinerons trois hypothèses.

1° Supposons qu'il existe trois points A, B, C non en ligne droite en chacun desquels le vecteur du champ considéré est nul.

Soit d'abord un point M non situé dans le plan ABC. Le vecteur du champ en M est perpendiculaire aux droites MA, MB, MC qui ne sont pas dans un même plan ; il est donc nul. Soit ensuite un point M situé dans le plan ABC ; les points A, B, C n'étant pas en ligne droite, nous pouvons supposer que M n'est pas situé sur la droite AB. Soit alors un point D non situé dans le plan ABC ; le vecteur du champ en D est nul, et comme M n'est évidemment pas situé dans le plan ABD, le vecteur du champ en M est, d'après la première partie du raisonnement, également nul.

Le champ considéré est donc le champ des moments d'un système de vecteurs équivalent à zéro.

2° Supposons qu'il existe un point A en lequel le vecteur du champ est nul, mais qu'il n'existe pas trois points non en ligne droite en chacun desquels le vecteur du champ est nul.

Il existe alors au moins un point B en lequel le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ du champ n'est pas nul ; le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est perpendiculaire à AB, le plan β mené par B perpendiculairement à $\overrightarrow{BB'}$ passe par A. Il existe en dehors du plan β au moins un point C en lequel le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ du champ n'est pas nul ; le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est perpendiculaire à AC, le plan γ mené par C perpendiculairement à $\overrightarrow{CC'}$ passe par A. Les plans β et γ, qui sont distincts, se rencontrent suivant une droite Ax.

Cette droite Ax ne passe pas par B. Si, en effet, elle passait par B, le vecteur $\overrightarrow{CC'}$, qui est perpendiculaire au plan γ, serait perpendicu-

(1) Voir les *Bulletins* n° 49, page 95 ; n° 50, pages 131 et 132.

laire à BC ; en vertu de la propriété énoncée du champ, le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ serait aussi perpendiculaire à BC, ce qui est impossible, puisque le point C n'est pas situé dans le plan β. D'autre part, évidemment, la droite Ax ne passe pas par C.

Soit sur la droite Ax un point quelconque M autre que A. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ du champ appliqué en M est perpendiculaire à la droite MA, et il est aussi perpendiculaire à MB : il est donc perpendiculaire au plan β. Pour la même raison, il est perpendiculaire au plan γ. Donc il est nul.

Cela posé, considérons le vecteur $\overrightarrow{CC''} = -\overrightarrow{CC'}$. Ce vecteur étant perpendiculaire à Ax, il existe sur Ax un vecteur glissant non nul $\overrightarrow{V}$ dont le moment par rapport à C est le vecteur $\overrightarrow{CC''}$. Ajoutons géométriquement au vecteur du champ considéré appliqué en un point quelconque M de l'espace le moment $\overrightarrow{M\mu}$ du vecteur $\overrightarrow{V}$ par rapport à ce point M. Nous substituons de la sorte au champ de vecteurs (C) considéré un champ de vecteurs (C_1) qui a aussi cette propriété que, quels que soient les points M et M' de l'espace, les vecteurs du champ (C_1) en M et M' aient sur la droite MM' des projections orthogonales équipollentes. Le moment de $\overrightarrow{V}$ par rapport à un point quelconque de Ax étant nul, le vecteur du champ (C_1) en un tel point est nul. D'autre part, le vecteur du champ (C_1) au point C est nul. Puisqu'il existe ainsi trois points non en ligne droite en chacun desquels le vecteur du champ (C_1) est nul, les vecteurs du champ (C_1) sont tous nuls ; quel que soit M, on a $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{M\mu}$. Le champ (C) est donc le champ des moments d'un vecteur égal à $-\overrightarrow{V}$ situé sur la droite Ax.

3° Supposons qu'il n'existe aucun point en lequel le vecteur du champ (C) soit nul.

Soit alors un vecteur $\overrightarrow{AA'}$ du champ. M étant un point quelconque de l'espace, ajoutons géométriquement au vecteur $\overrightarrow{MM'}$ du champ en ce point le vecteur $\overrightarrow{Mm}$ équipollent au vecteur $\overrightarrow{Aa}$ égal à $-\overrightarrow{AA'}$. Nous substituons de la sorte au champ de vecteurs (C) un champ (C_1) qui a aussi cette propriété que, quels que soient les points M et M' de l'espace, les vecteurs du champ (C_1) en M et M' aient sur la droite MM' des projections orthogonales équipollentes. Le vecteur du champ (C_1) en A est nul. Le champ (C_1) est donc, en vertu des résultats établis aux deux paragraphes précédents, le champ des moments d'un système de vecteurs équivalent à un vecteur unique $\overrightarrow{V}$ nul ou non nul. Le champ (C) est donc le champ des moments d'un système de vecteurs formé du vecteur $\overrightarrow{V}$ et d'un couple ayant pour moment le vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Ch. Michel,
Professeur au Lycée St-Louis.