Unification des définitions de mots et des notations mathématiques *(Suite)*

23. Quelques desiderata

I. — Les débutants sont gênés par les deux sens donnés parfois au mot « oscillation ». L'oscillation simple n'a aucun intérêt particulier au point de vue physique ; ce qui importe dans l'étude des phénomènes périodiques, c'est la *période*, donc l'oscillation complète. Il serait bon d'employer dans ce seul sens le mot *oscillation* et de ne plus parler d'oscillation simple et d'oscillation double, ce qui amène fréquemment des confusions.

II. — Les élèves éprouvent le même embarras à propos de la force vive : $\frac{1}{2} mv^2$, ou : mv^2 ? On est d'accord pour appeler $\frac{1}{2} mv^2$: *énergie cinétique*. Qu'il soit entendu que le nom de *force vive* est réservé à mv^2, en supposant que cela présente quelque intérêt.

III. — Nous avons besoin, pour les calculs approchés, d'un signe représentant « sensiblement égal à ». Le symbole # semble s'introduire avec ce sens, et permet d'écrire, par exemple : $\pi \# 3{,}1$.

Le symbole $\backsim$ représenterait, ainsi que nous l'indiquait le Bureau de l'Association des Professeurs de Mathématiques, l'équivalence de deux fonctions (deux fonctions étant dites « équivalentes » lorsque leur rapport tend vers 1), et permettrait d'écrire par exemple pour les infiniment petits $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$: $\sin x \backsim \operatorname{tg} x$.

Le Bureau de l'Union des Physiciens.

Nota. — Les réponses reçues à la suite d'une consultation (1) faite sur la demande du Bureau de l'Union des Physiciens, ont permis de constater que l'accord était unanime pour désigner par $\log_a x$ le logarithme du nombre réel positif x dans le système de base a ; par $\log x$ le logarithme vulgaire (ou par $\log_{10} x$ si une confusion était possible) ; et presque unanime pour désigner par Lx le logarithme népérien.

Toutefois nos collègues physiciens sont parfois gênés avec cette dernière notation, car la lettre L désigne aussi pour eux une longueur, une chaleur de fusion ou de vaporisation, une self. Aussi reviennent-ils dans ce cas à la notation générale : $\log_e x$.

24. Notations du produit scalaire et du produit vectoriel (1)

Nous remercions les membres de l'Association (2) qui ont bien voulu nous écrire pour nous faire connaître les notations qu'ils emploient pour le *produit scalaire* et le *produit vectoriel*. Pour la plu-

(1) Voir le *Bulletin* n° 52, pages 3 et 29.

(2) MM. Abelin, Aunis, Cagnac, Chazel, Dontot, Douchez, Durand (Ch.), Duthilleul, Iliovici, Labrousse, Léger, Lebel, Leroy, Levaxelaire, Mathieu, Martin, Marty, Ménard, Mérieux, Morel, Nicolas, Ninin, Ouivet, Ozil, Parmantier, Picardat (R.), Pons, Pouget, Rebeix, Roy, Sanselme, Sueur, Thiberge.

part, ils utilisent le symbole $\vec{a} \wedge \vec{b}$ pour le produit vectoriel, et emploient pour le produit scalaire ou l'un, ou l'autre, ou indifféremment l'un ou l'autre, des deux symboles $\vec{a} \,.\, \vec{b}$ et $\vec{a} \times \vec{b}$. Beaucoup se déclarent prêts à se rallier aux notations dont l'emploi sera conseillé à l'issue de cette enquête.

Il a semblé intéressant, pour orienter dès maintenant la discussion et provoquer les objections et les communications, de rappeler quelques-unes des notations employées. Les renseignements qui suivent sont empruntés pour la plupart à l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (édition française), aux *Eléments de Calcul vectoriel* de Burali-Forti et Marcolongo (traduction Lattès), et à la brochure *Notations et formules vectorielles*, de A. Lafay.

Bien entendu il est uniquement question ici des signes servant à représenter le produit scalaire et le produit vectoriel, les vecteurs étant toujours représentés dans ce qui suit par une lettre surmontée d'une flèche.

Pour le **produit scalaire** (*produit intérieur* de Grassmann, *direct produit* de Gibbs, *produit algébrique* de E. Carvallo, *produit géométrique* de B. de Saint-Venant, *produit scalaire* de Heaviside) les notations suivantes ont été utilisées :

$[\vec{a} \mid \vec{b}]$ ou $\vec{a} \mid \vec{b}$ ...	(Grassmann, Peano, Carvallo).
$(\vec{a} \,.\, \vec{b})$ ou $(\vec{a}\ \vec{b})$ ..	(Grassmann, Lorentz).
$-\mathrm{S}\,\vec{a}\ \vec{b}$	(Hamilton) (1).
$\vec{a} \times \vec{b}$	(Grassmann, Résal, Peano, Burali-Forti et Marcolongo).
$\vec{a}\ \vec{b}$	(Heaviside).
$\vec{a} \,.\, \vec{b}$	(Gibbs).

Dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, les notations utilisées varient suivant les auteurs des différents articles ; P. Langevin emploie la notation de Gibbs ou celle de Heaviside : $\vec{a} \,.\, \vec{b}$ ou $\vec{a}\ \vec{b}$ (Systèmes déformables : IV5,1) ; L. Lévy utilise la notation de Peano : $\vec{a} \mid \vec{b}$ (Fondements géométriques de la statique : IV2,1).

Pour le **produit vectoriel** [*produit extérieur* de Grassmann, *produit gauche* de Gibbs, *produit vectoriel* de Heaviside et de Carvallo, *vecteur-produit* de Lafay], on trouve les symboles :

$[\vec{a}\ \vec{b}]$ et $[\vec{a} \,.\, \vec{b}]$...	(Grassmann, Lorentz).
$\vec{a} \times \vec{b}$	(Gibbs).
$\overline{\vec{a}\ \vec{b}}$	(Résal, Lafay).
$\mathrm{V}\,\vec{a}\ \vec{b}$	(Hamilton, Heaviside) (1).
$\vec{a} \wedge \vec{b}$	(Burali-Forti et Marcolongo).

L'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* utilise la notation de Gibbs $\vec{a} \times \vec{b}$.

(1) Notation provenant de la théorie des quaternions.

Les raisons qui guideront notre choix doivent, me semble-t-il, être d'ordre pédagogique et d'ordre « chronologique », c'est-à-dire tenir compte des habitudes déjà prises dans certaines branches d'enseignement où ces notions sont utilisées depuis longtemps. Je crois devoir souligner ici l'importance particulière du point de vue pédagogique dans la discussion actuelle, car c'est nous — professeurs de l'enseignement secondaire — qui devons maintenant initier à ces questions les élèves des Lycées, à un moment où leur formation mathématique est beaucoup plus rudimentaire que celle des étudiants (sans doute peu nombreux) qui abordaient autrefois les études de physique ou de mécanique supérieure où ces notions étaient employées.

En ce qui concerne le *produit scalaire*, la notation de Gibbs : $\vec{a} \, . \, \vec{b}$ est utilisée par beaucoup de physiciens depuis longtemps et paraît avoir été adoptée d'une façon assez générale en mathématiques et dans l'enseignement. L'accord pourrait peut-être se faire sur cette notation. Toutefois il convient de signaler une intéressante observation de M. Weber, que l'on trouvera à la suite de cette étude.

La notation du *produit vectoriel* est plus délicate à préciser. C'est le symbole $\times$ de Gibbs qui semble utilisé le plus couramment et depuis longtemps dans les travaux de physique, et c'est évidemment là une raison très forte en faveur de son adoption. Mais on peut faire aux partisans de cette notation deux objections qui me paraissent avoir une grosse valeur au point de vue pédagogique :

D'abord, le signe $\times$ défini en arithmétique élémentaire comme le symbole de la multiplication est tout naturellement conservé en algèbre, pour l'écriture des produits, en même temps que le simple point de séparation entre les facteurs. (Bien que le symbole $\times$ soit assez peu utilisé en algèbre, son emploi est cependant dans les habitudes courantes et le fait que ce signe est employé dans les débuts de l'arithmétique rend pratiquement impossible sa suppression de la liste des notations algébriques). Les deux signes $\times$ et ., qui ont la même signification en algèbre, ont, avec les notations de Gibbs, deux significations très différentes dans le calcul vectoriel. Les confusions de notations soit dans la lecture, soit dans l'écriture, sont faciles à commettre.

D'autre part, le signe $\times$ évoque tout naturellement la multiplication arithmétique ou algébrique de deux nombres avec la propriété fondamentale de commutativité, que ne possède pas la multiplication vectorielle. L'objection s'aggrave lorsqu'on combine plus de deux vecteurs par cette opération, la propriété d'associativité n'existant pas non plus pour elle.

Parmi les autres notations employées, les notations $V\,\overrightarrow{\vec{a}\;\vec{b}}$ ou $\overline{\overline{\vec{a}\;\vec{b}}}$, très séduisantes tant qu'il ne s'agit que de deux vecteurs, deviennent rapidement compliquées dans les combinaisons de plus de deux vecteurs. Les notations avec crochets ou parenthèses ont le grave inconvénient d'immobiliser des signes couramment employés avec une autre signification.

Reste la notation $\vec{a} \wedge \vec{b}$ de Burali-Forti et Marcolongo, qui ne me semble pas avoir d'autre défaut que celui d'avoir été proposée quelques années après l'adoption courante en physique de cette notion et de sa représentation par les symboles déjà mentionnés.

Les indications qui précèdent auront rempli leur rôle si elles provoquent l'envoi (1) de communications nombreuses sur cette question.

J. Desforge,

25. Sur trois multiplications de la théorie des vecteurs

Quelle que soit l'opération qu'il s'agisse d'indiquer, *il me semble nécessaire de pouvoir disposer d'un signe opératoire*, signe pouvant d'ailleurs être supprimé lorsque cela ne créera aucune difficulté. Il convient par suite de prévoir trois signes différents pour indiquer les trois « multiplications » que l'on rencontre au début de la théorie des vecteurs, savoir : la multiplication d'un vecteur par un scalaire, la multiplication scalaire de deux vecteurs, la multiplication vectorielle de deux vecteurs.

Dans mon enseignement j'ai adopté le point (.) pour la première, le signe $\times$ pour la seconde et le signe $\wedge$ pour la troisième.

M. Weber,
Professeur au Collège Chaptal.