Sur la théorie des erreurs

J'ai eu bien des mécomptes avec la théorie des erreurs, jusqu'au jour où, prenant pour base des faits concrets, j'ai adopté la présentation suivante :

Ayant apporté palmer, pieds à coulisse (avec et sans vernier), mètre pliant, je fais mesurer par les élèves le diamètre d'une clef, la hauteur d'un banc, etc... Je leur laisse découvrir l'imprécision de l'œil, de l'instrument de mesure, de l'objet à mesurer lui-même. Nous devenons, par la pensée, menuisier ou opticien, boucher ou chimiste et nous discutons de la précision nécessaire et suffisante à chacun de ces métiers. J'ai parfois à batailler avec les adorateurs du chiffre exact ; je leur montre que le problème qui tombe juste est truqué, car les phénomènes naturels ne se laissent pas séduire par les beautés du système décimal. Autrement dit, j'introduis le doute dans tous les esprits, mais un doute limité par des certitudes et je conclus par exemple : la largeur de mon bureau est comprise entre 82 cm. 64 et 83 cm. 12.

Le lendemain, après interrogation et, s'il en est besoin, nouvelle discussion, je peux, sûr d'être compris, revenir aux abstractions mathématiques :

Définitions. — Toute mesure pratique se traduit par un nombre A inconnu, mais compris entre deux nombres connus A_1 et A_2 appelés *valeurs approchées* de A *par défaut* et *par excès*.

Il est plus commode de faire intervenir la demi-somme $a = \frac{A_1 + A_2}{2}$ dite *moyenne* de A, la demi-différence $da = \frac{A_2 - A_1}{2}$ dite *marge* de A et de remplacer la double inégalité $A_1 < A < A_2$ par l'abréviation conventionnelle $A = a \pm da$.

Ainsi, au lieu de $82{,}64 < A < 83{,}12$ nous écrirons $A = 82{,}88 \pm 0{,}24$ ou plus simplement encore $A = 82{,}90 \pm 0{,}26 = 82{,}9 \pm 0{,}3$ de façon à ramener la marge à n'avoir qu'un chiffre significatif, du même ordre décimal que le dernier chiffre conservé à la moyenne, celle-ci étant arrondie vers l'unité la plus proche. Toutefois ces simplifications ne sont pas à conseiller si elles augmentent par trop la marge et il est souvent prudent de garder 2 chiffres significatifs à la marge.

Il faut savoir traduire rapidement sous forme abrégée les périphrases plus ou moins longues, mais toujours précises, qui sont encore en usage :

$x = 1{,}414$ à 0,001 près par défaut se traduit par $x = 1{,}4145 \pm 0{,}0005$.

$y = 3{,}1416$ avec une erreur, dans un sens inconnu, inférieure à une demi-unité du dernier ordre décimal conservé (ouf !) se traduit par

$$y = 3{,}14160 \pm 0{,}00005.$$

$z = 36{,}84$ à 1 millième de sa valeur près signifie

$$36{,}84 \times 0{,}999 < z < 36{,}84 \times 1{,}001$$

donc $z = 36{,}84 \pm 0{,}03684$ que l'on peut traduire $z = 36{,}84 \pm 0{,}04$.

Opérations sur les nombres approchés. — 1° On démontre aisément que $A + B - C = (a + b - c) \pm (da + db + dc)$.

Bien faire remarquer que les marges s'ajoutent toujours, parce qu'on doit se placer dans le cas le plus défavorable. Puis généraliser, p, q, r étant des coefficients parfaitement connus, et positifs, à

$$pA + qB - rC = (pa + qb - rc) \pm (pda + qdb + rdc).$$

2° Produits : Pour deux facteurs on obtient aisément :

$$AB = (ab + dadb) \pm (bda + adb).$$

Avant de généraliser remarquons que les quotients $\frac{da}{a}$, $\frac{db}{b}$ que nous appellerons *flou* de A et *flou* de B sont, en général, bien inférieurs à 0,1 et, par suite, que le terme $da\,db$ est négligeable, même par rapport à la marge $(bda + adb)$. Cette remarque conduit à poser

$$X = AB \quad x = ab \quad dx = bda + adb \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

qui permet de passer facilement à

$$X = ABC\ldots \quad x = abc\ldots \quad \frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}\ldots$$

d'où pour p entier $\quad X = A^p \quad x = a^p \quad \dfrac{dx}{x} = p\dfrac{da}{a}$.

J'ajoute, sans le démontrer, que cette dernière formule est valable pour p fractionnaire.

3° Monômes : Etablissons d'abord que $X = \dfrac{1}{C}$ donne à un terme négligeable près $\quad x = \dfrac{1}{c} \quad \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dc}{c}$.

Par suite $X = \dfrac{A^pB^q}{C^r}$ donnera $x = \dfrac{a^pb^q}{c^r}$ et $\dfrac{dx}{x} = p\dfrac{da}{a} + q\dfrac{db}{b} + r\dfrac{dc}{c}$

Ces divers résultats se prêtent à un résumé très simple :

Théorème I. — *La moyenne d'une combinaison quelconque de nombres approchés est égale à la même combinaison des moyennes de ces nombres* (dans les exposés habituels ce théorème fort important est méconnaissable ou méconnu).

Théorème II. — *Le flou d'un monôme est la somme des produits du flou de chaque facteur par la valeur absolue de son exposant* (par 1 s'il n'a pas d'exposant).

Théorème III. — *La marge d'un polynôme est la somme des produits de la marge de chaque terme par la valeur absolue de son coefficient* (par 1 s'il n'a pas de coefficient).

Avec ces trois théorèmes $\left(\text{et la définition : flou} \doteq \dfrac{\text{marge}}{\text{moyenne}}\right)$ nous sommes en mesure de résoudre tout problème correctement posé. Et cela rapidement car (les flous étant généralement compris entre 10^{-1} et 10^{-5}) nous sommes en droit d'employer les logarithmes à cinq décimales pour le calcul de la moyenne et le calcul mental (deux chiffres suffisent) pour le calcul des flous et des marges.

J'ose espérer que l'Association des Professeurs de Mathématiques saura réclamer avec énergie si l'on pose encore au baccalauréat l'absurde question : avec combien de chiffres exacts faut-il prendre telle donnée pour obtenir telle précision au résultat ?

Nota. — Il serait facile, en Mathématiques Spéciales, d'établir les théorèmes suivants :

moyenne de $f(A, B, C) = f(a, b, c)$

$$\text{marge de} \quad f(A, B, C) = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| da + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| db + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| dc.$$

Ch. Meinrath,
Professeur à l'Ecole Nationale Technique de Strasbourg.