Sur un point du tétraèdre et une question de minimum

Il s'agit du point dont la somme des distances aux quatre sommets du tétraèdre est minimum.

Soit O, ce point, et ABCD le tétraèdre. Ce point O ne peut se trouver à l'extérieur du tétraèdre ; s'il était par exemple du côté opposé à A par rapport au plan BCD, en appelant O' son symétrique par rapport à ce plan, on aurait $\Sigma(O'A) < \Sigma(OA)$.

Dans le cas où le point O n'est confondu avec aucun sommet, considérons deux ellipsoïdes de révolution, passant par O et ayant pour foyers, le premier, deux sommets quelconques (A et B), le second, les deux autres sommets. Ces ellipsoïdes sont tangents extérieurement en O, car L étant un point quelconque du premier on a

$$LA + LB = OA + OB, \qquad \text{donc} \qquad LC + LD \geqq OC + OD.$$

Leur normale commune en O est bissectrice des angles formés par les rayons vecteurs. Ainsi, la bissectrice commune des angles AOB et COD, rencontre AB et CD en des points I et J situés respectivement entre A et B, C et D. Soient de même MN, la bissectrice de AOC et BOD et PQ, celle de AOD et BOC. D'après ces dispositions des points de la figure, on reconnaît que le point O ne peut se trouver ni dans une face, ni sur une arête de ABCD. Dans notre hypothèse il est donc intérieur au tétraèdre.

Les demi-droites OA, OB, OC, OD déterminent alors 4 trièdres égaux, car ils sont deux à deux homologues dans les demi-tours ayant pour axes IJ, MN ou PQ. On a

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \alpha, \quad \widehat{AOC} = \widehat{DOB} = \beta, \quad \widehat{AOD} = \widehat{BOC} = \gamma.$$

Ainsi, du point O, on voit sous le même angle, deux arêtes opposées quelconques de ABCD, et le point O est le sommet de trois cônes de révolution qui passent par A, B, C et D, et dont les axes (IJ, MN, PQ) rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre.

D'autre part, deux de ces demi-tours effectués successivement, ayant pour résultante, le troisième, les axes IJ, MN et PQ sont deux à deux rectangulaires. Le point O est donc le sommet d'un trièdre trirectangle dont chaque arête rencontre deux arêtes opposées de ABCD.

A', B', C', D' étant quatre points quelconques situés respectivement sur les demi-droites OA, OB, OC, OD, le point dont la distance à ces nouveaux points est minimum est encore le point O. En particulier, lorsque $OA' = OB' = OC' = OD'$, le point O est alors centre de gravité et centre de la sphère circonscrite.

Si on considère le trièdre formé avec trois des demi-droites OA, OB, OC, OD, la quatrième est la droite de concours des plans qui passent chacun par une arête de ce trièdre et par la bissectrice de la face opposée. Par rapport aux axes OB, OC, OD, les 3 paramètres directeurs de OA sont donc égaux et ces paramètres sont aussi ceux de OB par rapport aux axes OA, OD, OC. Il en résulte qu'ils sont tous égaux à (-1) et que l'on a la relation

$$1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0.$$

Dans ces trièdres égaux dont les faces sont α, β, γ notons encore que la somme des 3 dièdres est égale à 2π et que l'envergure est égale à π (l'envergure étant l'aire du triangle sphérique découpé par les faces dans la sphère de centre O et de rayon un).

Si dans le tétraèdre ABCD, l'un des trièdres, celui de sommet A par exemple a une envergure supérieure à π, les 3 autres ont des envergures plus petites, la somme des envergures des 4 trièdres d'un tétraèdre étant inférieure à 2π. O' étant un point intérieur au tétraèdre, l'envergure de O'(BCD) est supérieure à celle de A(BCD), donc supérieure a π. Le point O est alors confondu avec le sommet A. En projetant le trièdre A sur l'une de ses faces et en remarquant que la somme des deux dièdres adjacents à cette face est toujours supérieure à π, on voit que la somme des 3 arêtes issues de A est inférieure à la somme des 3 arêtes issues d'un autre sommet du tétraèdre.

Si les 4 points ABCD forment un quadrilatère plan convexe, le point O est le point de concours de ses diagonales. Si le point D est intérieur au triangle ABC, le point O est confondu avec D.

Détermination expérimentale du point O. — Dans le cas général, les demi-droites OA, OB, OC, OD sont telles que 4 forces égales orientées suivant ces demi-droites s'équilibrent. En attachant en un même point M, 4 fils supportant des masses égales et passant sans frottement, respectivement par les points fixes A, B, C, D, la position d'équilibre du système s'établira lorsque le point M viendra en O. Si le trièdre A(BCD) a une envergure supérieure à π, le point M sera arrêté par le point A (avec un dispositif approprié) et il supportera de la part de A, une réaction qui s'ajoutera aux 3 tensions passant par B, C et D, pour faire équilibre à la quatrième.

Généralisation. — Dans le cas de n points fixes $A_1, A_2, \dots A_n$, imaginons encore un système de n fils inextensibles, sans poids, réunis en un point d'attache M, supportant des points matériels $M_1, M_2, \dots M_n$, de même masse et passant respectivement par $A_1, A_2, \dots A_n$. Dans la position d'équilibre de ce système, le centre de gravité des points $M_1, M_2, \dots M_n$ est aussi bas que possible (principe de Torricelli. La somme des brins de fil qui pendent verticalement $(A_1M_1 + A_2M_2 + \dots + A_nM_n)$ est alors maximum et par suite la somme des distances de M aux n points fixes est minimum.

Enfin si les points $M_1, M_2, \dots M_n$ ont des masses différentes $p_1, p_2, \dots p_n$, l'équilibre est atteint lorsque $\Sigma(p_1 \times A_1M_1)$ est maximum et par suite lorsque $\Sigma(p_1 \times MA_1)$ est minimum.

Dans le cas de $n = 3$, voir Géométrie d'Hadamard : Exercices 363 et 364.

J. Lhermitte,
professeur au Lycée Janson-de-Sailly.