DEUXIÈME PARTIE

Sur les champs de moments

Voici une proposition qui se rattache à la note de M. WEBER publiée par le *Bulletin* n° 49.

Si un champ de vecteurs est tel que la différence géométrique des vecteurs du champ en deux points M, M' est orthogonale à MM' cette différence géométrique est parallèle à un plan fixe.

Je désignerai dans ce qui va suivre par $\overrightarrow{V}_M$ le vecteur du champ attaché au point M et par $\overrightarrow{V}_M^{M'}$ le vecteur $\overrightarrow{V}_{M'} - \overrightarrow{V}_M$.

Soit O un point arbitraire. Le torseur dont le vecteur libre est $\overrightarrow{V}_M^{M'}$ et dont le moment par rapport à O est $\overrightarrow{MM'}$ est équivalent à un vecteur unique $\overrightarrow{W}_M^{M'}$ puisque $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{V}_M^{M'}$ sont perpendiculaires.

Considérons quatre points A, B, C, D non dans un même plan. Les trois vecteurs $\overrightarrow{W}_B^C$, $\overrightarrow{W}_C^A$, $\overrightarrow{W}_A^B$ forment un torseur dont le vecteur libre : $\overrightarrow{V}_B^C + \overrightarrow{V}_C^A + \overrightarrow{V}_A^B$, est nul, ainsi que le moment par rapport au point O : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$.

Il est donc équivalent à zéro et les trois vecteurs $\overrightarrow{W}_B^C$, $\overrightarrow{W}_C^A$, $\overrightarrow{W}_A^B$ sont coplanaires et concourants ; il en est de même de chacun des groupes :

$$\overrightarrow{W}_B^C,\ \overrightarrow{W}_C^D,\ \overrightarrow{W}_D^B\ ;\qquad \overrightarrow{W}_C^D,\ \overrightarrow{W}_D^A,\ \overrightarrow{W}_A^C\ ;\qquad \overrightarrow{W}_D^A,\ \overrightarrow{W}_A^B,\ \overrightarrow{W}_B^D.$$

Or les six vecteurs W ne peuvent être concourants en un point S, car la droite OS serait alors perpendiculaire à la fois aux six arêtes du tétraèdre ABCD ; il résulte des quatre conditions qui viennent d'être énumérées que ces six vecteurs sont portées par les six côtés d'un quadrangle plan. En conséquence les vecteurs $\overrightarrow{V}_B^C$, $\overrightarrow{V}_C^A$, $\overrightarrow{V}_A^B$, $\overrightarrow{V}_A^D$, $\overrightarrow{V}_B^D$, $\overrightarrow{V}_C^D$ sont parallèles à un plan fixe (1).

Il est alors aisé de montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est un champ de moments. Il est en effet déterminé d'une manière unique lorsqu'on se donne le vecteur $\overrightarrow{V}_A$ attaché au point A, le vecteur $\overrightarrow{V}_A^B$ non nul qui doit être perpendiculaire à AB et le plan P parallèle à tout vecteur $\overrightarrow{V}_M^{M'}$. Les vecteurs $\overrightarrow{V}_A^M$ et $\overrightarrow{V}_B^M$ attachés à un point M sont déterminés en direction (sauf si une des droites, MA, est perpendiculaire au plan P, mais

(1) Il résulte de cette démonstration que si deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' sont tels que les arêtes AB, AC, AD, BC, CD, DB sont respectivement orthogonales aux arêtes A'B', A'C', A'D', B'C', C'D', D'B', l'un d'eux au moins a ses quatre sommets dans le même plan.

alors $\vec{V}_A^M = 0$). Pour les avoir, il suffit de construire un triangle connaissant un côté et les directions des deux autres. Ce champ qui est unique coïncide avec celui du moment d'un torseur dont le vecteur libre $\vec{\Omega}$ perpendiculaire au plan P est défini par le produit vectoriel $\vec{V}_A^B = \vec{AB} \times \vec{\Omega}$ et dont le moment par rapport à A est $\vec{V}_A$.

G. Iliovici,
Professeur au Lycée Buffon.