

Champs de moments

Application à la cinématique du corps solide

Etant donné un système (S) de vecteurs glissants, en tout point M de l'espace est appliqué un vecteur déterminé $\vec{V}(M)$, qui est le moment résultant en M du système (S). On dit que l'ensemble des vecteurs $\vec{V}(M)$ constitue un « champ de moments ».

Un tel champ admet la propriété suivante : la différence géométrique des vecteurs du champ en deux points quelconques M, M' , est orthogonale à MM' .

En effet on sait que la différence $\vec{V}(M') - \vec{V}(M)$ est le moment, par rapport à M' , de la résultante générale du système (S), appliquée en M ; ce moment est bien orthogonal à MM' .

En d'autres termes, $\vec{V}(M')$ et $\vec{V}(M)$ ont la même projection orthogonale sur la droite MM' .

Nous allons démontrer la réciproque : Si un champ de vecteurs est tel que la différence géométrique des vecteurs du champ en deux points quelconques MM' est orthogonale à MM' , il existe un système (S) de vecteurs dont le champ considéré est le champ de moments (1).

Remarquons d'abord que si le système (S) existe, il est unique (à une équivalence près), car deux systèmes (S) et (S') ayant même moment en tout point de l'espace sont équivalents.

Soient trois points ABC non en ligne droite ; posons

$$\vec{\beta} = \vec{V}(B) - \vec{V}(A)$$

$$\vec{\gamma} = \vec{V}(C) - \vec{V}(A)$$

Par hypothèse $\vec{\beta}$ est perpendiculaire à AB, et $\vec{\gamma}$ à AC. On peut alors déterminer un vecteur \vec{AR} tel que $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ soient ses moments respectivement par rapport à B et à C. En effet le vecteur cherché doit être dans les plans perpendiculaires à $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ menés par A, ces plans contenant, en vertu de l'hypothèse, les droites AB et AC respectivement.

Supposons d'abord que ces plans ne soient pas confondus, c'est-à-dire que $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ ne soient pas parallèles. Les deux plans se coupent alors suivant une droite $A\Delta$; il existe un vecteur \vec{AR} et un seul, de support Δ , admettant $\vec{\beta}$ pour moment relativement à B ; de même il existe \vec{AR} porté par Δ admettant $\vec{\gamma}$ pour moment par rapport à C. Je dis que $\vec{AR} = \vec{AR}$. En effet, on a

$$\vec{\gamma} - \vec{\beta} = \vec{V}(C) - \vec{V}(B)$$

(1) Ce théorème est indiqué et démontré dans le *Calcul Vectoriel* de CHATELET et KAMPÉ DE FÉRIET, p. 274, et dans le *Précis de Mécanique Rationnelle* de G. BOULIGAND, p. 8. La démonstration que nous proposons se présente sous un aspect plus élémentaire.

Donc $\vec{\gamma} - \vec{\beta}$ est orthogonal à BC. Or

$$\vec{\gamma} - \vec{\beta} = M_C^t \overrightarrow{AR'} - M_B^t \overrightarrow{AR} = M_B^t \overrightarrow{AR'} + M_C^t \overrightarrow{BR''} - M_B^t \overrightarrow{AR},$$

en désignant par $\overrightarrow{BR''}$ le vecteur équipollent à $\overrightarrow{AR'}$ mené par B.

$$\text{D'où } \vec{\gamma} - \vec{\beta} = M_C^t \overrightarrow{BR''} + M_B^t (\overrightarrow{AR'} - \overrightarrow{AR})$$

le premier terme du deuxième membre est orthogonal à BC; il faut donc que le second le soit s'il n'est pas nul. Or, si $\overrightarrow{AR'}$ n'est pas équipollent à \overrightarrow{AR} , ce second terme est perpendiculaire au plan BA; il faut donc que ce plan contienne BC, contrairement à l'hypothèse.

Donc $\overrightarrow{AR'} = \overrightarrow{AR}$.

Ce raisonnement tombe en défaut si Δ coïncide avec AB, c'est-à-dire si $\vec{\gamma}$ est perpendiculaire au plan ABC. Mais alors la projection de $\vec{\gamma}$ sur BC étant nulle, il en est de même de celle de $\vec{\beta}$, et $\vec{\beta}$ est nul ou perpendiculaire à ABC, ce qui est le cas particulier que nous avons laissé de côté.

Supposons maintenant $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ perpendiculaires au plan ABC. Nous allons déterminer le support de \overrightarrow{AR} de la manière suivante :

Soient BB' et CC' les distances de B et C à ce support; on doit avoir, en mesurant toutes les longueurs avec une même unité,

$$\begin{aligned} AR \times BB' &= |\beta| \\ AR \times CC' &= |\gamma|. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{BB'}{CC'} = \frac{|\beta|}{|\gamma|}.$$

Donc la droite cherchée doit couper BC en l'un des deux points qui partagent BC dans le rapport $\frac{|\beta|}{|\gamma|}$. Le choix entre les deux droites ainsi obtenues résulte immédiatement de la considération du sens relatif des deux vecteurs parallèles $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$. Cette droite $A\Delta$ est donc unique. Le vecteur \overrightarrow{AR} est ensuite bien déterminé sur cette droite par la condition d'avoir $\vec{\beta}$ comme moment en B; il a aussi $\vec{\gamma}$ comme moment en C d'après ce qui vient d'être dit.

Si l'un des vecteurs $\vec{\beta}$ ou $\vec{\gamma}$ est nul, l'autre, supposé non nul, est perpendiculaire à ABC, et la droite Δ se confond avec AB ou AC; on en déduit encore \overrightarrow{AR} .

Si $\vec{\beta} = \vec{\gamma} = 0$, le vecteur \overrightarrow{AR} ne pouvant passer à la fois en B et C est nul.

\overrightarrow{AR} est donc déterminé dans tous les cas, sans aucune exception.

Cela posé, considérons un système (S) de vecteurs ayant \overrightarrow{AR} comme résultante générale et $\overrightarrow{V(A)}$ comme moment résultant en A. Il admet comme moment résultant en B et C les vecteurs $\overrightarrow{V(B)}$ et $\overrightarrow{V(C)}$. Je dis qu'il en est de même en tout point M de l'espace.

Supposons d'abord que M ne soit pas dans le plan ABC. Alors les droites MA, MB, MC forment un trièdre. Soit \vec{MG} le moment résultant de (S) en M. La projection orthogonale de \vec{MG} sur MA est égale à la projection du moment de (S) en A, c'est-à-dire de $\vec{V}(A)$; de même les projections orthogonales de \vec{MG} sur MB et MC sont respectivement les mêmes que celles de $\vec{V}(B)$ et $\vec{V}(C)$. Mais, par hypothèse, le vecteur $\vec{V}(M)$ a les mêmes propriétés.

Les vecteurs $\vec{V}(M)$ et \vec{MG} , ayant mêmes projections orthogonales sur les trois arêtes d'un trièdre, sont égaux.

Si M est dans le plan ABC, il suffit de reprendre le raisonnement en remplaçant C, par exemple, par un point D extérieur au plan ABC, pour lequel la démonstration vient d'être faite.

CONCLUSION. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de moments est que les vecteurs du champ en deux points quelconques MM' aient même projection orthogonale sur la droite MM'.*

APPLICATION A LA CINÉMATIQUE DU SOLIDE (1)

Soit un solide Σ en mouvement : considérons à un même instant t les vitesses de ses divers points ; cela nous fait un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$. Si nous considérons les vitesses de deux points M et M', les projections orthogonales de ces vitesses sur MM' sont équipollentes. Une démonstration élémentaire de ce fait s'appuie sur le théorème de la composition des vitesses : la différence $\vec{V}(M') - \vec{V}(M)$ est égale à la vitesse de M' relativement à un trièdre où M est fixe ; dans ce mouvement relatif, M' reste à une distance constante de M, donc sa vitesse est normale à MM'.

Par suite, *les vitesses au même instant des divers points d'un solide en mouvement sont les moments résultants en ces points d'un certain système de vecteurs.*

CAS PARTICULIER : *Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.* Si Σ passe par un point fixe A, $\vec{V}(A) = 0$, donc le système (S) équivaut à un vecteur unique \vec{AR} , déterminé comme on l'a vu plus haut par les vitesses de deux points B et C non en ligne droite avec A. On a alors

$$\vec{V}(M) = M_M^A \vec{AR}.$$

Les vitesses sont les mêmes que si le solide était animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par A, le vecteur rotation étant $\vec{\omega} = \vec{AR}$.

M. WEBER,
Professeur au Collège Chaptal

(1) D'après CHATELET et KAMPÉ DE FÉRIET, p. 318.