DEUXIÈME PARTIE

Sur l'enseignement de la géométrie

L'enseignement de la géométrie présente, par rapport aux autres sciences, une anomalie inquiétante : il a la plus grande valeur éducative et le moindre succès. Les observations suivantes risquent quelques hypothèses sur les causes de cette situation et proposent les modifications correspondantes. Elles se rapportent surtout aux classes préparant aux baccalauréats et aux grandes écoles ; il resterait à rechercher en quoi elles doivent affecter la période d'initiation, à laquelle conviennent des procédés pédagogiques particuliers.

La part de la géométrie dans l'enseignement secondaire. — Dans les programmes antérieurs au baccalauréat, la part de la géométrie paraît bien proportionnée à son importance ; la médiocrité des résultats obtenus a sans doute d'autres causes qui seront étudiées plus loin.

Parmi les écoles dont le programme dépasse les mathématiques élémentaires, l'Ecole Centrale est la seule qui admette la géométrie pure à ses concours d'admission ; il est intéressant de constater qu'elle est en même temps l'école dont l'enseignement est le plus pratique.

L'absence de la géométrie pure aux autres concours s'explique sans doute par les raisons développées au rapport annexe à l'arrêté du 18 juillet 1925 fixant le programme de la classe de Mathématiques spéciales ; toute objection s'y trouve écartée par l'argument suivant : « Si les examinateurs constatent cependant que trop de candidats « mettent en jeu, avant toute réflexion, l'outil analytique, si ceux- « ci..... paraissent considérer les problèmes de géométrie comme « des combinaisons d'équations d'où ils ne cherchent à dégager « aucun fait géométrique, aucune interprétation concrète, il n'y faut « pas voir un défaut imputable au programme, mais l'effet d'une « tendance naturelle au moindre effort intellectuel, et de la hâte à « répondre à la question posée. Il n'y a là rien de bien nouveau, et ce « n'est pas un changement de programme qui y porterait remède. « C'est aux professeurs qu'il faut demander de lutter sans se lasser « contre cette déformation de la méthode mathématique ».

Cependant la solution géométrique est généralement la moins laborieuse, et « la tendance naturelle au moindre effort » l'impose à tout esprit initié aux bonnes méthodes. Si nos élèves ont l'habitude contraire, c'est que leurs programmes contiennent des recettes de calcul applicables à de nombreux cas, et les laissent ignorer les propriétés géométriques également efficaces. La composition des programmes a donc ce résultat paradoxal que la tendance naturelle au moindre effort engage précisément l'élève dans la voie la plus pénible.

Mais il n'y a pas lieu de discuter ici les programmes des écoles d'ingénieurs : il suffit d'admettre que l'obligation de les restreindre a justifié des sacrifices regrettables. A partir du baccalauréat, le futur ingénieur perd à peu près tout contact avec la géométrie pure, au préjudice de sa formation intellectuelle.

Le cas des futurs professeurs est plus grave.

Ceux qui n'ont pas préparé l'agrégation ont cessé dès le baccalauréat leurs relations officielles avec la géométrie pure, et ne les ont reprises que par l'intermédiaire de leurs élèves. Certes ils ont fréquenté les classes de Mathématiques spéciales ou de licence, où sont observées les prescriptions du rapport cité plus haut. Mais elles restent insuffisantes à former un géomètre. Tant que la géométrie ne sera présentée que comme un auxiliaire des méthodes de calcul, les élèves méconnaîtront sa puissance et resteront incapables de résoudre un problème de géométrie pure. Elle a pourtant ses méthode propres, aussi fécondes que les méthodes algébriques, plus simples, plus élégantes et plus démonstratives, et un futur professeur de mathématiques ne peut les ignorer. Leur enseignement n'est pas organisé, et la plupart des professeurs se forment eux-mêmes : la préparation de leur cours leur coûte un travail et le choix de la forme qu'ils préfèrent les expose à des tâtonnements qu'une initiation opportune leur eût évités.

Les agrégés ont interrompu leurs études de géométrie pure pendant quatre ans au moins à partir du baccalauréat. Dans les cas les plus favorables, la préparation à l'agrégation comprend d'abord les exercices de leçons, qui ne se rapportent en géométrie qu'au programme du baccalauréat, insuffisant pour de futurs maîtres. La préparation aux épreuves écrites consiste généralement en l'étude d'un petit nombre de problèmes de géométrie proposés aux concours précédents. Les résultats du concours permettent de douter que la majorité des candidats soient en possession des méthodes qui doivent permettre à tout professeur de résoudre élégamment et rapidement une question nouvelle pour lui.

Il semble désirable que les candidats aux bourses de licence et à l'Ecole Normale reçoivent un enseignement complémentaire de géométrie pure, ou tout au moins, qu'au concours une interrogation spéciale contrôle leurs connaissances et leurs aptitudes. Enfin, en deuxième ou troisième année d'Ecole Normale pourrait trouver place un enseignement méthodique, rapide, condensé et assez élevé pour rejoindre, tout en restant dans le domaine de la géométrie pure élémentaire, les résultats de théories d'analyse souvent laissées sans application.

Le fond de l'enseignement. — La tradition a longtemps maintenu à l'école une sorte de géométrie archaïque, telle que l'eussent enseignée Euclide ou Pascal, sans efficacité au service d'un esprit sans génie. Elle se présentait comme une suite de monographies d'êtres distincts, dont les vrais liens de parenté restaient cachés. Son plus grave défaut était la pénurie d'idées générales, d'où résultait l'absence ou la stérilité des méthodes de résolution. Les maîtres gardaient pour eux les bons principes, comme si leurs élèves s'en trouvaient indignes.

Aussi les élèves considèrent-ils encore le problème de géométrie comme un jeu mystérieux dont la réussite échappe à toute règle. Ils n'usent guère que d'expédients, comme le calcul d'angles par les arcs correspondants, la construction de « segments capables », la recherche désespérée de triangles égaux ou l'introduction intempestive de de triangles semblables, auxquels les plus savants sont fiers d'ajouter l'emploi de relations métriques qui leur interdisent définitivement toute compréhension du sujet. D'ailleurs le plus souvent la mauvaise position des problèmes ne leur suggère pas d'autres ressources. Quant à la géométrie à trois dimensions, mieux vaut n'en pas parler.

Un progrès important aurait pu résulter de l'introduction, déjà ancienne, dans l'enseignement des transformations les plus simples. Mais ce changement est resté sans effet. Les élèves regardent encore les transformations comme des questions isolées, extérieures à la géométrie qui leur est familière ; ils ne pensent à les employer que lorsque l'énoncé du problème les y invite expressément ; cette incapacité se révèle à tous les niveaux : le rapport officiel sur un récent concours d'agrégation (5 août 1923) constate que « l'usage des rota- « tions paraît inconnu à plus de la moitié des concurrents » (1).

Il serait injuste d'attribuer cet échec à l'insuffisance d'assimilation des élèves. L'importance qu'ils accordent à l'étude des transformations est précisément celle que lui donnent la plupart des livres ou des cours. Les rares bons traités qui contiennent un exposé d'ensemble de ces questions les présentent comme des compléments, recommandés aux spécialistes, mais que le lecteur ordinaire peut négliger sans craindre de méconnaître la géométrie. Ainsi se trouvent perdues de nombreuses occasions de montrer l'utilité primordiale de ces notions, et leur place exacte dans l'ensemble des connaissances.

Les transformations homographiques générales entre figures à deux ou trois dimensions sont exclues de tous les programmes, sauf la perspective et la dualité par polaires réciproques. La géométrie pure classique se réduit à peu près au domaine des transformations conformes linéaire et quadratique. Il paraît naturel de faire de l'étude de ce groupe l'objet essentiel de la géométrie, l'analyse des diverses transformations, la recherche de leurs relations et de leur composition suffisent à épuiser le sujet. Le cours peut être composé de façon que les faits connus viennent se placer naturellement dans ce cadre ; il est probable que ceux qui ne s'y rangent pas sans artifice peuvent être supprimés sans inconvénient. Les procédés d'exposition s'adaptent aisément à la qualité intellectuelle des élèves.

Par cet aménagement nouveau, l'ensemble des connaissances acquises s'accroît, en même temps que chacune se trouve située par rapport

(1) Voir le *Bulletin* n° 35, page 130.

aux autres ; elles se groupent autour d'un petit nombre d'idées, et des rapports se révèlent entre des faits considérés autrement comme indépendants. L'observation de leur ensemble est plus aisée, et le chercheur discerne plus facilement parmi les propriétés connues celles qui résolvent le problème actuel.

Une autre conséquence heureuse du changement proposé serait de renouveler et d'étendre le champ des exercices habituels. De nombreuses propriétés se trouvent interdites par leur complication apparente ou leur manque apparent d'intérêt lorsqu'elles s'expriment par les moyens de la géométrie classique, tandis que situées dans le domaine des transformations, elles présentent une simplicité et une élégance remarquables.

Les élèves de Mathématiques Spéciales et les candidats à l'enseignement trouveraient profit à l'étude des transformations conformes quadratiques, parmi lesquelles ils ne connaissent que l'inversion ; sans doute elles s'obtiennent toutes à partir des transformations homographiques et de l'inversion, mais l'étude de leurs formes réduites, de leurs propriétés intrinsèques et de leur composition révèle ou éclaire bien des faits qui resteraient isolés et mystérieux. Il serait utile aussi de montrer aux mêmes élèves les relations étroites entre la théorie des nombres complexes et la géométrie, ou encore de définir ces nombres par la similitude ; actuellement il est constant d'observer que les élèves de Mathématiques Spéciales méconnaissent cette liaison.

Il faut enfin reconnaître que le choix de certains sujets de concours, la composition de certains cours ou programmes semblent promettre un changement dans le sens indiqué. La question se trouve comme mise en vedette, dans les programmes du 3 décembre 1923 et du 4 juin 1925, par un titre où figure pour la première fois le mot « transformation ». Il est immédiatement suivi du mot « déplacement », également neuf. Serait-ce une invitation discrète à l'évolution ? Par un respect scrupuleux de la liberté du professeur, le rapport annexe (3 septembre 1925) reste sobre de commentaires sur cette partie du programme et n'en précise ni le caractère, ni l'étendue. Les déplacements hélicoïdaux, les relations des déplacements entre eux ou avec les autres transformations ne sont pas explicitement mentionnés.

Il reste permis d'espérer que ce modeste paragraphe du programme finira par s'annexer la géométrie tout entière.

La forme de l'enseignement. — Le regroupement des connaissances permettrait en outre de remédier à un autre grave défaut de l'enseignement actuel : c'est l'abus du calcul, contre lequel il paraît désirable de provoquer une réaction systématique.

L'élève introduit dès qu'il le peut les relations métriques, même lorsqu'un raisonnement évident permettrait de l'éviter. L'exposé revêt ainsi la même physionomie qu'un problème d'algèbre : des égalités reliées par quelques-uns de ces clichés très courts et dépourvus de sens par lesquels l'auteur trahit sa négligence à comprendre profondément et à dire précisément. Par l'emploi du calcul, l'élève s'interdit à la fois la compréhension exacte des faits et l'exercice si salutaire de la rédaction.

Dans les cas où la nature du sujet exclut absolument toute formule, les résultats obtenus sont déplorables. Il faut avoir lu des solutions strictement géométriques, rédigées par des bacheliers moyens, pour reconnaître à quel point la pratique du raisonnement est indispensable à la culture de l'esprit. Ces élèves sont pourtant admis en majorité aux écoles qu'ils préparent, puisque l'organisation des concours oblige à les apprécier surtout selon leur habileté en analyse. Si l'on songe que la plupart d'entre eux, au cours de leur vie, auront moins besoin des connaissances que des qualités intellectuelles acquises au lycée, on est tenté de constater que la culture mathématique secondaire manque en partie son but.

Ici encore l'élève n'est pas seul responsable. Il est curieux d'observer à quel point certains livres de géométrie pure sont encombrés de calculs ; s'ils ne contribuent pas nécessairement à la formation des élèves, ils témoignent au moins de la tradition universitaire.

Pour que l'élève ne prenne pas l'habitude de recourir sans raison au calcul, il suffit que le maître la perde. L'un des critérium de la qualité d'un cours paraît être la précocité de la disparition des calculs. Il ne s'agit pas de constituer la géométrie indépendamment de l'idée de nombre ; cette tentative, réalisable et intéressante au point de vue logique, serait déplacée dans l'enseignement secondaire. Sans changer le contenu de la géométrie classique, il est possible de composer le cours de façon qu'un petit nombre de propriétés métriques choisies avec soin et rassemblées au début suffisent à tous les besoins ultérieurs. Si pour telle question, il paraît impossible d'éviter le calcul, c'est qu'auparavant la démonstration de la propriété métrique correspondante a été omise, et sa recherche montre généralement qu'elle résout non seulement le problème qui l'a révélée, mais d'autres questions qui peuvent être très différentes. Dans un enseignement ainsi disposé, l'application du raisonnement aux conclusions des démonstrations initiales entraîne la résolution sans calcul de toute question ultérieure (mesures d'aires ou de volumes évidemment réservées).

Si cette méthode présente le caractère dogmatique inhérent à toute œuvre de synthèse, elle n'interdit en rien l'emploi du procédé pédagogique de la découverte : d'ailleurs toute recherche s'appuie sur des connaissances antérieures, et l'habileté consiste à bien choisir les prémisses.

Les exercices pourraient être choisis selon les mêmes principes, de façon à montrer aux élèves la puissance des méthodes propres de la géométrie, à leur imposer la discipline du raisonnement et le dédain des calculs superflus. Certes, la tâche du maître s'en trouverait accrue : la lecture d'une solution géométrique est plus pénible et sa correction plus longue que celle d'un problème d'algèbre, mais le maître y gagnerait de mieux connaître ses élèves, car il ne saurait apprécier complètement un esprit sans l'avoir vu souvent aux prises avec le raisonnement géométrique.

Il va sans dire que les problèmes métriques gardent toute leur importance pratique, mais les méthodes de géométrie pure peuvent leur convenir : en suggérant la voie la plus simple, elles abrègent les calculs. Par ces problèmes, par la géométrie analytique, la mécanique, l'élève garde assez d'occasions de rechercher l'interprétation concrète de ses calculs, pour que l'on ne doive pas hésiter à le soumettre aussi à des exercices de géométrie pure ; c'est d'ailleurs une condition indispensable à sa formation intellectuelle : le raisonnement géométrique développe l'intelligence, et l'abus du calcul la stupéfie.

L'analyse de la forme donnée aux exposés géométriques révèle trop souvent des fautes importantes. L'habitude ne s'est pas encore perdue de démontrer une propriété sur un cas particulier de figure, et de déclarer que, pour les autres, la démonstration serait identique ou analogue. C'est là un exemple de négligence et d'imprécision que les élèves ne sont que trop tentés de suivre.

Le remède à ce grave défaut est connu depuis longtemps ; il consiste en la mesure des grandeurs orientées dans les espaces orientés. Mais il s'en faut de beaucoup que leur usage ait atteint la généralité désirable. Pour les vecteurs, l'amélioration est notable, mais incomplète. Pour les angles, il est exceptionnel de rencontrer un élève qui sache les utiliser correctement, même parmi les candidats aux concours les plus élevés. Il est probable que dans les cours leur emploi n'est pas général ; d'ailleurs les notations recommandées par l'Association des professeurs de mathématiques ne répondent pas à tous les besoins.

Le maître obtiendrait une amélioration notable en s'astreignant à ne travailler que dans les espaces orientés, tant que la nature du sujet le permet. Le début de la réforme exige une application soutenue, mais l'habitude se prend vite et devient si profonde que l'introduction irrégulière d'une grandeur non orientée apparaît immédiatement comme absurde.

Les élèves suivront leur maître s'il ne tolère aucune exception, ni pour lui ni pour eux. Le résultat sera d'autant plus rapide que l'introduction des grandeurs orientées sera plus précoce, car les habitudes de la période d'initiation laissent une trace profonde sur l'esprit de l'enfant. Dès que les nombres négatifs ont été introduits, il est illogique de réduire la mesure d'un vecteur à celle de sa longueur ; il est étrange d'employer les angles orientés en trigonométrie et en géométrie analytique, et de les exclure de la géométrie. Et l'on ne saurait sans injustice reprocher aux élèves les confusions fréquentes entre les nombreuses significations du mot angle. C'est au début de la géométrie pure que doivent être données les définitions des angles d'axes et de droites dans le plan orienté.

L'un des obstacles à l'extension de la réforme paraît être la complication des notations : il eut été plus sage de réserver les plus simples à la mesure des grandeurs orientées, le signe de la valeur absolue suffiront pour les autres dont l'emploi est exceptionnel. Mais l'objection reste sans gravité, si les calculs du cours de géométrie sont strictement réduits et rassemblés dans l'introduction. Les notations d'angles ne seront employées dans la suite que pour les nommer; une démonstration effectuée par des calculs d'angles est généralement mal conçue.

La définition des grandeurs orientées est parfois regardée comme moins intuitive que celle des valeurs absolues; mais la plupart des notions réputées intuitives sont en réalité acquises et devenues familières. Lorsque les élèves ne connaîtront plus d'autres angles que les orientés, leur conception de ces grandeurs deviendra intuitive, selon une expression paradoxale fréquemment employée.

L'observation de certaines tentatives décevantes, s'il en est, ne saurait faire douter de la possibilité de la réforme.

Les expériences portent souvent sur des élèves mal préparés, gênés par plusieurs années de mauvaises habitudes. La ténacité du maître peut obtenir en un an des résultats encourageants, c'est-à-dire que pour la plupart des élèves les erreurs ne sont pas plus nombreuses que pour toute autre théorie; certains mêmes, antérieurement initiés, paraissent complètement maîtres des procédés de mesure dans les espaces orientés.

Conclusion. — En résumé l'analyse précédente conduit à recommander le maintien de la discipline géométrique pour les candidats aux grandes écoles, l'aménagement de la géométrie comme l'étude des transformations simples, la suppression de tout calcul évitable, et l'emploi exclusif des grandeurs orientées.

Ces conditions paraissent indispensables à la bonne formation des futurs maîtres; pour les autres élèves, elles ne sauraient qu'accroître le désir de probité, de clarté et de précision que doit inspirer aux jeunes hommes la fréquentation des mathématiques.

L. SAUVIGNY,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

A travers les Revues

Nouvelles Annales de Mathématiques (55, quai des Grands-Augustins, Paris : abonnement aux dix numéros annuels : 35 francs).

G. ILIOVICI et E. WEILL : *Quelques remarques de géométrie élémentaire sur les coniques considérées comme enveloppes de droites* (décembre 1925, p. 65). — Les auteurs considèrent une conique définie comme enveloppe de la droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques sur deux bases différentes. Ils démontrent qu'*étant données deux divisions homographiques non semblables portées sur deux axes distincts, il existe toujours deux points réels d'où l'on voit sous un angle constant le segment qui joint les points homologues.* Ils ramènent la détermination d'un tel point F à la construction d'un