

DEUXIÈME PARTIE

Sur les méthodes en géométrie élémentaire Exemple déduit de la droite de Simson

Je désire montrer, par un nouvel exemple classique (1), comment un raisonnement, à *priori*, permet, avant d'avoir tracé la figure, de transformer la propriété à démontrer en une autre, beaucoup plus intuitive. La proposition de SIMSON comprend deux parties :

1° Les projections p_1 , p_2 , p_3 d'un point P du cercle ABC sur les côtés BC , CA , AB du triangle ABC sont sur une même droite, dite droite de Simson attachée à P .

2° Cette droite de Simson passe au milieu de la droite PH , H étant l'orthocentre de ABC .

En général on se contente de démontrer la première partie (et sa réciproque) ; la seconde est considérée comme un *complément* difficile que l'on se borne à signaler aux élèves. Or, il est au contraire très simple de voir que cette seconde partie n'est pas en réalité un complément, mais constitue au contraire l'ensemble de la propriété si l'on a soin de l'énoncer ainsi :

P étant un point du cercle ABC , les symétriques P_1 , P_2 , P_3 de P relativement à BC , CA , AB sont sur une même droite passant en H .

Il est bien clair que si nous démontrons directement cette propriété, les trois points p_1 , p_2 , p_3 seront sur une droite parallèle à $HP_1P_2P_3$ et issue du milieu de PH . Il suffit même de démontrer que H , P_1 , P_2 , sont en ligne droite ; pour cela il n'y a qu'à montrer que l'angle compté depuis une certaine droite (indéfinie) HX jusqu'à la droite (indéfinie)

(1) Voir le Bulletin n° 43, page 55.

HP_1 ou HP_2 est le même (à $k\pi$ près). Il est naturel de prendre pour HX la droite HC qui joue le même rôle vis-à-vis de P_1 ou P_2 . Or, une symétrie relative à BC transforme l'angle (HC, HP_1) en l'angle (H_1C, H_1P) , si H_1, H_2, H_3 désignent les symétriques de H relativement à BC, CA, AB , symétriques situés sur le cercle ABC ; l'angle (HC, HP_2) est de même, par symétrie relativement à AC , transformé en l'angle (H_2C, H_2P) et comme les points P, C, H_1, H_2 sont sur un même cercle on en déduit $(H_1C, H_1P) = (H_2C, H_2P)$, d'où le reste découle.

Dans sa géométrie plane, M. HADAMARD indique en exercice la méthode que j'ai adoptée pour démontrer que H, P_1, P_2 sont en ligne droite, mais ne remarque pas que cette propriété supprime la démonstration de la première partie. Je crois, aussi, utile, dès que l'âge des élèves le permet, de recourir à la condition $(DA, DB) = (CA, CB)$ entre angles de droites *indéfinies* dans le plan orienté, comme condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D soient sur un même cercle; écrire soit $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, soit $\widehat{ADB} = 2 \text{ dr} - \widehat{ACB}$ n'est pas suffisamment convaincant. On peut, à la rigueur, reprocher à la démonstration donnée ici de ne pas démontrer que, *reciproquement*, si p_1, p_2, p_3 sont en ligne droite, P est sur le cercle ABC . Il suffit encore de faire les remarques à priori suivantes :

$$p_2 p_3 \pm p_3 p_1 \pm p_1 p_2 = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que p_1, p_2, p_3 soient en ligne droite; il s'agit ici de segments pris en valeur absolue, les deux signes $+$ ne peuvent être pris ensemble; il reste donc trois hypothèses, qui indiquent si c'est p_1, p_2 ou p_3 qui est entre les deux autres.

La condition nécessaire et suffisante pour que P, A, B, C soient sur un cercle est

$$BC \cdot PA \pm CA \cdot PB \pm AB \cdot PC = 0.$$

C'est la proposition classique de PROLÉMÉE qui se démontre d'ailleurs par l'inversion de pôle P ; même remarque sur les trois combinaisons de signes seules possibles.

Il suffit maintenant de comparer les deux expressions

$$p_2 p_3 \pm p_3 p_1 \pm p_1 p_2 \quad \text{et} \quad BC \cdot PA \pm CA \cdot PB \pm AB \cdot PC.$$

Remarquons que le cercle de diamètre AP passe en p_2 et p_3 et que $p_2 p_3$ est vu du sommet A sous l'angle A ou $2 \text{ dr} - A$; donc $p_2 p_3 =$

$$AP \sin A = \frac{BC \cdot PA}{2R}, \quad R \text{ étant le rayon du cercle circonscrit à } ABC;$$

on peut donc écrire, les signes se correspondant,

$$BC \cdot PA \pm CA \cdot PB \pm AB \cdot PC = 2R [p_2 p_3 \pm p_3 p_1 \pm p_1 p_2]$$

de sorte que la nullité de l'un des membres entraîne la nullité de l'autre et *reciproquement*: cela donne donc la démonstration de ce que j'appelais, au début, la première partie de la proposition de SIMSON et de la *reciproque*.

B. GAMBIEU,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.