

VI. Documents officiels

6. Rapport sur la Composition de Mathématiques (Classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1924

Paris, le 13 octobre 1924.

MONSIEUR LE MINISTRE,

Le nombre des concurrents est un peu inférieur à celui des années précédentes. On ne pourrait que s'en féliciter, si la proportion des copies de quelque valeur s'en trouvait sérieusement augmentée. Le premier aspect des résultats inspire quelques craintes à ce sujet ; car, sur 307 copies, il y en a encore 71 blanches ou ne portant que l'énoncé, soit 23 0/0.

On se demande la raison de toutes ces abstentions. Tant de candidats se sont-ils mépris à ce point sur le niveau du concours et sur leurs propres forces qu'ils se soient trouvés complètement arrêtés par le sujet proposé ? N'ont-ils pas manqué de confiance et de courage en présence d'un texte (1) dont la première partie seule, demandant une démonstration, leur apportait le secours d'une affirmation, tandis que les cinq autres laissaient libre cours à l'observation et à la recherche ? Il est difficile de faire le départ de ces différentes causes : il est probable que la seconde a joué le rôle principal.

Sur les 236 concurrents qui ont participé effectivement à l'épreuve, 215 se sont attaqués à la première partie, 107 à la seconde, 40 à la troisième, 10 à la quatrième, 45 à la cinquième et 30 à la sixième.

Si l'on ne tient compte que des questions traitées ou ébauchées, les moyennes des notes obtenues sont respectivement 6,15 pour la première partie ; 6,09 pour la seconde ; 2,25 pour la troisième ; 6,15 pour la quatrième ; 3,67 pour la cinquième et 4,06 pour la sixième.

Si l'on remarque, en outre, que les notes au moins égales à 10 sont au nombre de 54, 33, 3, 3, 9, 4 pour les diverses parties, on aura une idée assez nette de la valeur intrinsèque moyenne des épreuves.

Un autre renseignement classera mieux les candidats eux-mêmes. Sur un maximum de 20×6 ou 120 points, les treize copies récompensées ont obtenu respectivement 96, 85, 66, 60, 54, 49, 45, 43, 42, 41, 40, 37 et 37, ce qui correspond à une moyenne variant de 16 à 6,33. Puis on trouve 4 copies ayant de 36 à 32 points ; 5 copies de 29 à 26 points ; 13 de 24 à 19 points ; 27 de 18 à 13 points ; 38 de 12 à 7 points et 136 de 6 points à zéro.

Le candidat qui a obtenu le premier prix se détache nettement des autres ; il s'est montré supérieur à tous les lauréats des concours

(1) Voir l'énoncé, p. 4 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours de 1924*.

précédents. S'il n'avait laissé échapper quelques fautes, dont certaines ne peuvent être attribuées à une étourderie, l'impression de sa copie eût été demandée par le jury.

Un examen détaillé des diverses parties du problème permettra de préciser les critiques qui s'adressent à l'ensemble.

La première question visait l'égalité des cercles circonscrits aux trois triangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ obtenus de la façon suivante : sur les côtés d'un triangle t (ABC) orienté, à partir des milieux A_1, B_1, C_1 de ces côtés, on porte des vecteurs A_1A' , B_1B' , C_1C' ayant respectivement pour mesure algébriques $\lambda \cos A$, $\lambda \cos B$, $\lambda \cos C$, λ désignant une variable, ce qui définit les points A' , B' , C' .

La proportionnalité des côtés du triangle variable T ($A'B'C'$) aux sinus des angles correspondants du triangle fixe t , conséquence immédiate de la formule $a = 2r \sin A$, apparaissait de suite comme nécessaire et suffisante à l'égalité des cercles étudiés ; cette condition a été généralement vue, sinon formulée nettement. Restait à la réaliser : les moyens les plus variés ont été employés à cet effet.

L'un des plus simples et des plus naturels consistait à trouver la signification géométrique des vecteurs A_1A' , B_1B' , C_1C' , eu égard à leurs mesures algébriques. Si l'on remarque que les facteurs $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ sont proportionnels aux distances affectées de signes (ce qui oblige à distinguer le cas où t est acutangle de celui où il est obtusangle), du centre O du cercle γ circonscrit à t aux côtés de ce triangle, on voit que les angles $\widehat{A_1OA'}$, $\widehat{B_1OB'}$, $\widehat{C_1OC'}$ sont égaux et de même sens, et par suite que le triangle T se déduit du triangle T_1 ($A_1B_1C_1$) par une rotation d'angle $\theta = \widehat{A_1OA'}$ autour du point O suivie d'une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\cos \theta}$. T est donc

directement semblable à T_1 et par suite à t . En outre λ et θ vérifient la relation $\lambda = r \operatorname{tg} \theta$, r désignant le rayon du cercle γ .

De plus, d'après la théorie de la similitude directe, les cercles circonscrits aux triangles $B'C'A'$, $C'A'B'$, $A'B'C'$ passent par le point double O de la similitude. Les côtés de T sont vus du point O sous des angles supplémentaires des angles de t et les cercles visés sont non seulement égaux entre eux, mais égaux au cercle Γ circonscrit à T . Il en résulte que le point O est l'orthocentre de T . Ce fait découlait d'ailleurs immédiatement de ce que O est l'orthocentre de T_1 et le point double de la similitude qui relie T à T_1 .

Les meilleures solutions données (il y en a d'excellentes) ont fait plus ou moins appel à ces idées. Mais on s'est contenté aussi d'à peu près et la similitude utilisée a été trop souvent affirmée ; beaucoup ont parlé du point double, sans dire où il se trouve, en s'appuyant uniquement sur la forme des mesures algébriques données. On a l'impression que quelques-uns faisaient appel à des connaissances particulières dont ils celaient l'origine.

Faut-il mentionner l'obscurité qui subsiste encore chez certains, au sujet des grandeurs proportionnelles? Il est pénible de lire des phrases comme celles-ci : « Un angle proportionnel à un arc et par suite à une corde... » ; « ...les angles sont proportionnels aux côtés opposés. Donc en valeur absolue les côtés sont proportionnels aux cosinus des angles » ; « ... $A_1, A', B_1, B', C_1, C'$ sont proportionnels à λ et aux angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, donc aux côtés » ; « ... — décalages proportionnels aux cosinus. Or les cosinus sont proportionnels aux côtés, donc... » écrit un quatrième qui, en se relisant, supprime la syllabe *co* devant le second *cosinus*. La vérité a gagné à cette amputation ; mais peut-on en dire autant de la logique? On croit rêver en lisant tout cela.

Dans le plus grand nombre des copies, on s'est efforcé de démontrer la similitude de T et de t en cherchant les expressions des côtés de T en fonction de λ . Le calcul est intéressant ; mais, bien qu'il ait souvent abouti, il fut rarement dirigé de façon méthodique. On a couvert des pages d'égalités alors qu'il suffisait de calculer $\overline{BC}^2$, par exemple, en fonction de r et des sinus et cosinus des angles de t , en tenant compte de la relation $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. On arrive ainsi à l'égalité $\overline{BC}^2 = (r^2 + \lambda^2) \sin^2 A$, qui suffit à conclure. Le rayon R de Γ est égal à $\frac{R_1}{\cos \theta}$ ou $\frac{r}{2 \cos \theta}$; par suite $4 R^2$ vaut $\lambda^2 + r^2$. Plusieurs des questions suivantes se trouvent amorcées.

La seconde était ainsi conçue : « Trouver les courbes auxquelles sont tangents les côtés du triangle T quand λ varie. »

En fait, on demandait l'enveloppe des côtés de T . Mais la théorie des enveloppes n'est pas au programme de la classe et si les propriétés tangentielles du cercle et des coniques y figurent, elles sont obtenues en partant des définitions ponctuelles de ces courbes ; à peine en trouve-t-on une amorce à propos des pôles et des polaires. C'est donc à dessein que le mot enveloppe n'a pas été employé, non plus que dans la troisième et la quatrième partie.

Les maîtres qui ont donné à leurs élèves, sur cette question, des notions relevant de la géométrie analytique ont donc commis une erreur ; elle est assez répandue pour qu'on y insiste : dans 18 copies la géométrie analytique, la dérivation et parfois même l'intégration (?) de l'équation d'une droite, par rapport au paramètre λ dont elle dépend, ont été utilisées pour définir l'enveloppe. Quelques concurrents ont obtenu ainsi l'équation d'une parabole, mais ils ont été fort empêchés d'en voir la définition géométrique simple. Il y a là un exemple de ces anticipations que l'on rencontre à tous les degrés et qui mériteraient une étude spéciale : ceux qui s'y laissent aller seraient bien mal venus à se plaindre de l'étendue des programmes et de l'insuffisance des horaires.

Bon nombre de candidats savent que les droites qui découpent des divisions semblables sur deux droites fixes sont tangentes à une

parabole ; quelques-uns ont même entendu parler de l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques. Ces connaissances superficielles ne les ont pas menés bien loin et fort peu, parmi eux, sont arrivés à situer nettement les paraboles enveloppes.

C'est de la géométrie pure que relèvent les bonnes solutions, assez nombreuses d'ailleurs.

L'angle $\widehat{B'OC}$ égal à $\widehat{B_1OC_1}$ est constant ; en vertu d'une réciproque d'un théorème de PONCELET, la droite $B'C'$ est tangente à une conique dont un foyer est en O et dont deux tangentes particulières sont AC et AB , lieux de B' et de C' . Comme ces deux points s'en vont à l'infini simultanément, cette conique est une parabole ; on en obtient la tangente au sommet en joignant les projections B_1 et C_1 , du point O sur AC et AB .

On peut aussi remarquer que le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$ passant par Q , les projections de ce point sur les côtés du triangle sont alignées ; le point I , projection de O sur $B'C'$, se déplace donc sur B_1C_1 . L'angle droit $\widehat{OIB'}$ est tel que son sommet décrit une droite, tandis qu'un de ses côtés passe par un point fixe ; l'autre côté $B'C'$ est tangent à une parabole dont le foyer est en O et dont la tangente au sommet est B_1C_1 .

D'ailleurs, on a signalé, dans plusieurs copies, que tous les points remarquables du triangle T décrivent en général des droites et que les droites remarquables du même triangle enveloppent en général des paraboles. Cela est vrai, en particulier, du centre de Γ , qui intervient dans la troisième partie, et de la polaire du point O par rapport à Γ , qui figure dans la quatrième.

La troisième question, par la forme elliptique de sa rédaction, a fort embarrassé les concurrents. L'événement a prouvé qu'une autre moins synthétique eût été préférable. Quoi qu'il en soit, l'interprétation à laquelle se sont arrêtés un grand nombre de ceux qui en ont trouvé une, est indéfendable. Voici l'énoncé :

« Démontrer que si Γ tend vers une position limite Γ_0 , les points communs à Γ_0 et à Γ tendent vers des positions limites M_0, M'_0 . On indiquera une construction géométrique simple des points M_0, M'_0 et on en cherchera le lieu ».

Il est évident, d'après ce texte, que Γ_0 est une position particulière de Γ et que cette position particulière est variable puisqu'on demande le lieu de M_0 et M'_0 . Comment a-t-on pu en tirer que Γ_0 est la position particulière Γ_1 de Γ qui correspond à $\lambda = 0$? C'est la signification adoptée dans 18 copies sur 40 qui ont traité de cette question.

En fait, c'était demander l'enveloppe du cercle Γ , définie ponctuellement pour obéir au scrupule indiqué plus haut.

Le problème n'a été traité complètement que dans la copie qui a obtenu le premier prix et ce n'en est pas la meilleure partie. En voici une solution assez simple :

Le centre ω du cercle Γ se déplace sur la droite Δ passant par le centre ω_1 de Γ_1 et perpendiculaire à $O\omega_1$; en outre le rayon de Γ est proportionnel à la distance $O\omega$. La relation $\frac{O\omega}{R} = \frac{O\omega_0}{R_0}$ montre que le point O est sur le cercle décrit sur SS' comme diamètre, S et S' étant les centres d'homothétie de Γ et Γ_0 . Ce cercle appartient au faisceau linéaire défini par Γ et Γ_0 , il passe par les points communs à ces derniers, si ces points existent. Il passe aussi par le point H symétrique de O par rapport à ω_1 , c'est-à-dire par l'orthocentre de t . Si Γ tend vers Γ_0 , celui des deux points S, S' qui est placé entre ω et ω_0 , tend vers ω_0 , et le cercle de diamètre SS' a pour position limite le cercle γ_0 circonscrit au triangle $OH\omega_0$. Les points M_0, M'_0 , sont à l'intersection de γ_0 et Γ_0 .

Si O est à l'extérieur de Γ_1 (t obtusangle) et par suite de tous les cercles Γ , les points M_0, M'_0 existent toujours. L'application du théorème de PROLÉMÉE au quadrilatère inscriptible $OM_0\omega_0H$ donne la relation :

$$HM_0 - OM_0 = OH \times \frac{\omega_0 M_0}{\omega_0 O}.$$

Le lieu des points M_0, M'_0 est une hyperbole ayant pour foyers les points O, H , et pour sommets les points d'intersection de OH et du cercle Γ_1 . La figure montre de plus que $\omega_0 M_0$ est la normale en M_0 à cette hyperbole, c'est-à-dire que cette hyperbole et le cercle Γ_0 sont tangents en M_0 ; on retrouve ainsi la notion d'enveloppe.

Si O est à l'intérieur de Γ_1 (t acutangle) et par suite de tous les cercles Γ , les points M_0, M'_0 n'existent pas toujours; ils n'existent que si $\omega_0 S_0$, diamètre de Γ_0 , est supérieur à R_0 . Le point ω_0 doit se trouver sur un segment de Δ , ayant pour milieu le point ω_1 et facile à définir.

On trouve cette fois : $OM_0 + HM_0 = OH \times \frac{\omega_0 M_0}{\omega_0 O}$.

Le lieu des points M_0, M'_0 est une ellipse ayant pour foyers les points O, H , et pour sommets les points d'intersection de OH et du cercle Γ_1 . La figure montre encore que cette ellipse et le cercle Γ_0 ont même normale et par suite même tangente en M_0 .

En résumé, le lieu est une conique dont Γ_1 est le cercle principal et dont les foyers sont les points O et H . Les cercles Γ constituent une famille de cercle focaux de cette conique.

Le cas où t est rectangle est à peu près sans intérêt.

Enfin, l'invariabilité du rapport $\frac{\omega_0 M_0}{\omega_0 O}$ montre que $\omega_0 M_0$, normale à la conique en M_0 , a pour enveloppe une caustique par réfraction, le rayon incident étant $O\omega_0$ et le rayon réfracté $\omega_0 M_0$.

La quatrième question visait le lieu du point E_0 où la tangente en O au cercle γ_0 rencontre $M_0 M'_0$ et la courbe dont les tangentes sont les polaires P du point O par rapport aux cercles Γ .

Quatre candidats ont vu la parabole enveloppe de P , deux le lieu

de E_0 . Aucun n'a relié l'une à l'autre par des considérations purement géométriques.

La projection F_0 du point O , sur la polaire P_0 de ce point par rapport à Γ_0 , décrit une droite Δ' parallèle à Δ : cela résulte de la similitude étudiée dans la première partie. La droite P_0 enveloppe donc une parabole Π dont le foyer est O et dont la tangente au sommet est Δ' .

Le cercle circonscrit au triangle OF_0F admet pour diamètre la droite OG'_0 , G'_0 étant le point de rencontre de P_0 et de P . Ce cercle est orthogonal à Γ_0 et à Γ , par suite à tout cercle du faisceau linéaire (Γ_0, Γ) et en particulier au cercle γ'_0 de ce faisceau, qui passe par O . Son centre est le milieu E'_0 de OG'_0 , de sorte que OE'_0 est tangente en O au cercle γ'_0 . Faisons tendre Γ vers Γ_0 : G'_0 tend vers le point de contact G_0 de P_0 avec son enveloppe Π . E'_0 tend vers E_0 . Le lieu de ce dernier point est donc la parabole homothétique de Π par rapport au point O , avec le rapport $\frac{1}{2}$. D'ailleurs E_0 est centre d'un cercle passant par O et tangent à Δ' .

La facilité apparente de la cinquième question — il semblait que le calcul dût y suffire — a retenu l'attention d'un assez grand nombre de candidats. Rappelons-en l'énoncé :

« Les perpendiculaires à BC en A' , à CA en B' , et à AB en C' sont les côtés d'un triangle $A''B''C''$; on demande de trouver la relation qui existe entre les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$. »

Quelques-uns ont trouvé cette relation, après de longs efforts le plus souvent, mais personne n'a épuisé le sujet. Bien que le texte ne demandât pas l'étude du déplacement des points A'' , B'' , C'' , il est bien évident que cela s'imposait. On s'est contenté fréquemment de remarquer la similitude des triangles t et T' ($A''B''C''$), sans en signaler les particularités. Or, les perpendiculaires à AB en C' et à AC en B' se coupent au point A'' diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$. On a vu que ce cercle passe par O : l'angle $\widehat{AOA''}$ est donc droit. Les points A'' , B'' , C'' décrivent des droites qui passent par O et sont respectivement perpendiculaires à OA , OB , OC . Les triangles T' sont homothétiques. Le point O est le point double de la similitude qui relie t et T' ; par suite OA'' , OB'' , OC'' sont égaux et le rayon R' du cercle circonscrit à T' est égal à OA'' . Si l'on remarque que OA'' se projette sur AC suivant le segment B_1B' et que l'angle de OA'' et de AC est égal à $\hat{B}$, on obtient de suite :

$$R' = \frac{B_1B'}{|\cos B|} = |\lambda|$$

ce qui donne la signification géométrique du paramètre λ .

En se reportant à l'égalité $4R^2 = \lambda^2 + r^2$, on voit que la relation demandée est $4R^2 = R'^2 + r^2$. On obtient ainsi une nouvelle génération des triangles T , en utilisant la construction préalable des triangles T' .

Restait une dernière question, réciproque de la première. Elle se formule ainsi :

« Y a-t-il, en dehors des triangles $A'B'C'$ précités, d'autres triangles $A'B'C'$ inscrits au triangle ABC et tels que les cercles circonscrits aux triangles $B'CA$, $C'AB$, $A'B'C$ soient égaux ? »

On a vu plus haut que cette égalité est conditionnée par la similitude de t et de $A'B'C'$ et on a constaté que les triangles T précités sont directement semblables à t . Or si t et $A'B'C'$ sont directement semblables, on peut passer de l'un à l'autre par une similitude dont le point double est O ; on retrouve les triangles T étudiés. Il suffisait donc de voir si t et $A'B'C'$ peuvent être inversement semblables.

Essayons d'ailleurs de construire un triangle $A'B'C'$ semblable à t , en choisissant arbitrairement le sommet A' sur BC . Le point B' se déplaçant sur AC , le lieu du point C' , porté par $A'B'$ et tel que $A'C'$, soit égal à $A'C$, est une droite δ parallèle à AC , car on a :

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{A'C}{A'B} = \frac{AC}{AB}.$$

Une rotation d'un angle $\hat{A}$, autour du point A' , amène δ dans la position δ_1 , dont l'intersection avec AB donne le point C' . Or la rotation peut s'effectuer soit dans le sens de l'angle $\widehat{BAC}$, soit dans le sens opposé. Dans le premier cas, on retrouve un triangle T ; dans le second, on constate que δ_1 et AB sont parallèles.

La réponse à la question posée est donc négative. C'est ce qu'ont vu quelques candidats ; mais bien peu en ont donné des raisons vraiment démonstratives, la distinction du sens étant insuffisante.

Le calcul se prêtait mal à l'étude de cette dernière question ; personne n'a d'ailleurs tenté de l'utiliser. Il conduit à des transformations qui intéresseraient les bons élèves de Mathématiques Spéciales. On peut même affirmer que bien peu arriveraient à résoudre les équations du second degré, aux trois inconnues $x = \overline{A_1A'}$, $y = \overline{B_1B'}$, $z = \overline{C_1C'}$, auxquelles on est conduit, si on les leur présentait sans leur en dire l'origine. Ces équations admettent les solutions définies par les formules $x = \lambda \cos A$, $y = \lambda \cos B$, $z = \lambda \cos C$: elles en ont une infinité d'autres complexes, qui correspondent à des points A' , B' , C' alignés sur une droite isotrope quelconque.

Sans présenter rien de bien nouveau, — il est difficile d'innover en pareille matière et ce n'est pas indispensable, — ce problème permettait d'apprécier le jugement des concurrents et de classer avec quelque sécurité. On ne peut qu'augurer favorablement l'avenir de ceux qui se sont placés aux premiers rangs.

Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, l'assurance de mes sentiments respectueux et dévoués.

L'Inspecteur général, président de la Commission de correction,

E. BLUTEL.